

8-1-2010

## Localisation de faisceaux caractères

Pramod N. Achar  
*Louisiana State University*

Anne Marie Aubert  
*Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche*

Follow this and additional works at: [https://digitalcommons.lsu.edu/biosci\\_pubs](https://digitalcommons.lsu.edu/biosci_pubs)

---

### Recommended Citation

Achar, P., & Aubert, A. (2010). Localisation de faisceaux caractères. *Advances in Mathematics*, 224 (6), 2435-2471. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.02.002>

This Article is brought to you for free and open access by the Department of Biological Sciences at LSU Digital Commons. It has been accepted for inclusion in Faculty Publications by an authorized administrator of LSU Digital Commons. For more information, please contact [ir@lsu.edu](mailto:ir@lsu.edu).

# Localisation de faisceaux caractères <sup>☆</sup>

Pramod N. Achar <sup>a</sup>, Anne-Marie Aubert <sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mathematics, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA*

<sup>b</sup> *C.N.R.S., Institut de Mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le 26 janvier 2009 ; accepté le 3 février 2010

Disponible sur Internet le 21 février 2010

Communiqué par Roman Bezrukavnikov

---

## Résumé

Nous obtenons une formule pour les valeurs de la fonction caractéristique d'un faisceau caractère en fonction de la théorie des représentations de certains groupes finis, liés au groupe de Weyl. Cette formule, qui généralise des résultats antérieurs de Mœglin et de Waldspurger, dépend de la connaissance de certains sous-groupes réductifs admettant un faisceau caractère cuspidal. Dans un second temps, afin de rendre la formule plus explicite dans le cas d'un groupe quasi-simple, nous déterminons ces sous-groupes à conjugaison près.

© 2010 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

## Abstract

We obtain a formula for the values of the characteristic function of a character sheaf, in terms of the representation theory of certain finite groups related to the Weyl group. This formula, a generalization of previous results due to Mœglin and Waldspurger, depends on knowledge of certain reductive subgroups that admit cuspidal character sheaves. For quasi-simple groups, we make the formula truly explicit by determining all such subgroups upto conjugation.

© 2010 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

MSC : 20C33 ; 20G40

Mots-clés : Faisceaux caractères ; Caractères des groupes réductifs finis ; Représentations des groupes de Weyl ; Classes unipotentes ; Support unipotent

---

<sup>☆</sup> Le premier auteur était partiellement appuyé par la subvention DMS-0500873 de la N.S.F. Le second auteur remercie la Louisiana State University pour son hospitalité lors d'un séjour durant lequel une partie de cet article a été réalisée.

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [pramod@math.lsu.edu](mailto:pramod@math.lsu.edu) (P.N. Achar), [aubert@math.jussieu.fr](mailto:aubert@math.jussieu.fr) (A.-M. Aubert).

*Keywords:* Character sheaves; Characters of finite groups; Representations of Weyl groups; Unipotent classes; Unipotent support

---

## Table des matières

1.	Introduction . . . . .	2436
2.	Rappels sur les faisceaux caractères . . . . .	2438
3.	Classification des sous-groupes de Lévi admettant un faisceau caractère cuspidal . . . . .	2440
3.1.	Quotients du groupe spécial linéaire . . . . .	2442
3.2.	Les groupes classiques . . . . .	2442
3.3.	Les groupes adjoints de type classique . . . . .	2442
3.4.	Les groupes Spin et $\frac{1}{2}$ Spin . . . . .	2443
3.5.	Les groupes adjoints de type exceptionnel . . . . .	2444
3.6.	Le groupe simplement connexe de type $E_6$ . . . . .	2444
3.7.	Le groupe simplement connexe de type $E_7$ . . . . .	2445
4.	Groupes d'inertie . . . . .	2445
4.1.	Description comme groupe de Coxeter étendu . . . . .	2445
4.2.	Interprétation duale . . . . .	2447
4.3.	Introduction du Frobenius . . . . .	2449
5.	Induction de faisceaux caractères cuspidaux . . . . .	2450
5.1.	Le complexe induit $K^z$ . . . . .	2450
5.2.	Structure mixte sur $K^{w_1}$ . . . . .	2451
5.3.	Décomposition de $K^{w_1}$ . . . . .	2451
5.4.	Fonctions caractéristiques . . . . .	2452
6.	La formule du caractère . . . . .	2453
6.1.	Rappels . . . . .	2453
6.2.	Sous-groupes de Lévi dans $\mathbf{H}$ . . . . .	2454
6.3.	Actions de Frobenius et doubles classes dans $W_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ . . . . .	2455
6.4.	Fonctions de Green généralisées . . . . .	2456
6.5.	Le résultat principal . . . . .	2458
7.	Classes de conjugaison de sous-groupes de Lévi dans le centralisateur d'un élément semi-simple . . . . .	2463
7.1.	Les cas triviaux . . . . .	2464
7.2.	Graphes de Dynkin . . . . .	2464
7.3.	Les groupes de type A et les groupes exceptionnels . . . . .	2464
7.4.	Les groupes classiques . . . . .	2465
7.5.	Les groupes adjoints de type classique . . . . .	2467
7.6.	Les groupes Spin et $\frac{1}{2}$ Spin . . . . .	2467
7.7.	Le cas $\mathbf{G} = E_6, \mathbf{L} = \mathbf{M} = (A_2)^2$ . . . . .	2468
7.8.	Le cas $\mathbf{G} = E_7, \mathbf{L} = \mathbf{M} = (A_1)^3$ . . . . .	2469
	Références . . . . .	2470

---

## 1. Introduction

Introduits par Lusztig dans [7], les faisceaux caractères fournissent une approche géométrique de la théorie des caractères des groupes finis de type de Lie. Nous en rappellerons la construction à la Section 2 (voir en particulier la Définition 2.1).

Soit  $k$  la clôture algébrique d'un corps fini  $\mathbb{F}_q$ . Fixons un nombre premier  $\ell$  différent de la caractéristique  $p$  de  $\mathbb{F}_q$ . Soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique réductif connexe sur  $k$  et défini sur  $\mathbb{F}_q$ . Les faisceaux caractères sur  $\mathbf{G}$  sont certains faisceaux pervers sur  $\mathbf{G}$ , qui sont  $\mathbf{G}$ -équivariants (pour l'action par conjugaison de  $\mathbf{G}$  sur lui-même) dans la catégorie  $D_c^b(\mathbf{G}, \mathbb{Q}_\ell)$  (catégorie « dérivée » bornée des complexes de faisceaux constructibles sur  $\mathbf{G}$ ). Nous notons  $G = \mathbf{G}^F$  le groupe (fini) des éléments de  $\mathbf{G}$  fixés par l'endomorphisme de Frobenius  $F$  associé à la structure  $\mathbb{F}_q$ -rationnelle de  $\mathbf{G}$ . Parmi les faisceaux caractères  $A$  sur  $\mathbf{G}$ , nous nous intéressons à ceux qui sont  $F$ -stables, i.e., tels qu'il existe un isomorphisme  $\phi : F^*A \xrightarrow{\sim} A$ . Le but du présent article est d'obtenir une formule du caractère pour un faisceau caractère  $F$ -stable arbitraire. Plus précisément, à tout couple  $(A, \phi)$  comme ci-dessus est associée une certaine fonction centrale sur le groupe  $G$ , appelée la *fonction caractéristique* de  $(A, \phi)$  et notée  $\chi_{A, \phi}$  (voir l'équation (21) pour un rappel de la définition). Nous obtenons une formule pour la valeur de  $\chi_{A, \phi}$  en un point arbitraire de  $G$ .

Les ingrédients pour l'obtention d'une telle formule sont les suivants :

- L'élément de  $G$  en lequel la fonction est calculée :  $\sigma v$ , où  $\sigma$  est un élément semi-simple de  $G$  et  $v$  est un élément unipotent de  $G$  qui commute à  $\sigma$ .
- Les données qui spécifient le faisceau caractère considéré. Ce sont
  - un triplet  $\mathfrak{t} := (\mathbf{L}, \Sigma, \mathcal{E})$ , composé d'un sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  d'un sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$ , de l'image réciproque  $\Sigma$  dans  $\mathbf{L}$  d'une classe de conjugaison de  $\mathbf{L}/Z^\circ(\mathbf{L})$  (où  $Z^\circ(\mathbf{L})$  est la composante neutre du centre de  $\mathbf{L}$ ), et d'un système local cuspidal  $\mathcal{E}$  sur  $\Sigma$ , qui détermine la « série de Harish–Chandra » à laquelle le faisceau caractère appartient ;
  - une représentation irréductible  $E$  du groupe d'inertie  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  de  $\mathfrak{t}$ , lequel est défini comme le quotient par  $\mathbf{L}$  de l'ensemble des éléments  $n$  de  $\mathbf{G}$  qui vérifient  $\text{ad}(n)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ . (Nous étudions le groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  en détail à la Section 4.)

La donnée du couple  $(\mathfrak{t}, E)$  détermine un faisceau caractère  $A_E$  sur  $\mathbf{G}$ .

- Afin d'obtenir une fonction caractéristique pour  $A_E$ , des données spécifiant l'action du Frobenius. La première condition est que  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{P}$  soient  $F$ -stables. En revanche, le couple  $(\Sigma, \mathcal{E})$  n'est pas  $F$ -stable en général, et il est nécessaire de considérer la  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ -classe  $Z_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  des éléments  $z$  tels que  $(F \circ \text{ad}(z))\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ . Pour un tel  $z$ , soit  $\mathfrak{t}^z := \text{ad}(g)(\mathfrak{t}) = (\mathbf{L}^z, \Sigma^z, \mathcal{E}^z)$ , où  $z = F^{-1}(g^{-1})g$ . Le triplet tordu  $\mathfrak{t}^z$  est  $F$ -stable (notons que le sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}^z$  n'est pas  $F$ -stable en général), ce qui permet de choisir une structure mixte sur le complexe induit  $\text{ind}_{\mathbf{P}^z}^{\mathbf{G}}(\text{IC}(\overline{\Sigma}^z, \mathcal{E}^z)[\dim \Sigma^z])$ . Laquelle structure mixte permet à son tour de définir une fonction caractéristique  $\chi_{A_E}$  pour tout composant  $A_E$  dudit complexe induit.
- Des données faisant intervenir à la fois l'élément  $\sigma v$  et le faisceau caractère  $A_E$ . Celles-ci sont obtenues en considérant les éléments  $x$  de  $\mathbf{G}$  tels que  $x^{-1}\sigma x$  soit la partie semi-simple d'un élément de  $\Sigma^z$ . Pour un tel  $x$ , nous considérons le tore  $\mathbf{T}_x^{\mathbf{H}} := xZ^\circ(\mathbf{L}^z)x^{-1}$  de  $\mathbf{H} := Z_{\mathbf{G}}^\circ(\sigma)$  (où  $Z_{\mathbf{G}}^\circ(\sigma)$  désigne la composante neutre du centralisateur dans  $\mathbf{G}$  de  $\sigma$ ) ainsi que son centralisateur  $\mathbf{M}_x := Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_x^{\mathbf{H}})$  dans  $\mathbf{H}$ .

Nous choisissons alors des représentants des orbites sous l'action de conjugaison par  $\mathbf{H}$  des  $\mathbf{M}_x$ . Nous notons ces représentants  $\mathbf{M}_{g_1}, \mathbf{M}_{g_2}, \dots, \mathbf{M}_{g_r}$ .

Fixons  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Le tore  $\mathbf{T}_{g_j}^{\mathbf{H}}$  étant  $F$ -stable, soit  $a_j := g_j^{-1}F(g_j)$  un élément de  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$ . L'application  $h \mapsto g_j^{-1}hg_j$ , définissant un plongement du groupe  $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_{g_j})$  dans

$N_G(\mathbf{L})$ , induit une application  $\iota_j : W_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_{g_j}) \hookrightarrow W_G(\mathbf{L})$ , où  $W_X(Y) := N_X(Y)/Y$ . L'application  $\iota_j$  transporte l'action de  $F$  en celle de  $a_j F$ .

Le couple cuspidal  $(\Sigma^z, \mathcal{E}^z)$  induit un couple cuspidal sur  $\mathbf{M}_j$  et donc une fonction de Green généralisée qui conduit à son tour à une fonction  $Q_{E'}^{\mathbf{H}}$  sur la variété unipotente de  $\mathbf{H}$  associée à une représentation irréductible  $E'$  de  $W_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_{g_j})$ .

La formule du caractère que nous obtenons (cf. Théorème 6.8) s'exprime en fonction d'une formule (cf. (37)) de type Mackey généralisée entre les sous-groupes  $W_t^{\mathbf{G}}$  et  $W_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_{g_j})$ .

Le cas particulier correspondant à  $\sigma = 1$ , dû à Lusztig (cf. [8]) a été l'un des ingrédients essentiels de [1]. Le cas correspondant aux faisceaux caractères dans la série unipotente  $\hat{\mathbf{G}}_1$  a été obtenu par Shoji en [13, Lemma 4.5]. Des formules générales pour les groupes symplectiques et spéciaux orthogonaux figurent dans les travaux de Mœglin et Waldspurger. Notre formule en est inspirée (en particulier de [15, Proposition 7.2]) et notre démonstration est une combinaison de [9, Proposition 2.16] et [15, Lemme 7.1]. Notre résultat est cependant moins explicite que dans *loc. cit.* dans la mesure où nous n'avons pas totalement explicité les structures mixtes concernées.

Dans les cas considérés dans [8,13,9] et [15], l'entier  $r$  se trouve être toujours égal à 1. Nous démontrons au Théorème 7.2 que si le groupe  $\mathbf{G}$  est semi-simple, quasi-simple, et différent de  $\mathrm{PSp}_{2n}$ ,  $\mathrm{PSO}_{2n}$ ,  $\frac{1}{2}\mathrm{Spin}_{2n}$  et  $E_7^{\mathrm{sc}}$ , alors  $r$  est égal à 1, et que si  $\mathbf{G}$  est l'un de ces quatre groupes, alors  $r$  vaut 1 ou 2, le cas  $r = 2$  se produisant effectivement.

## 2. Rappels sur les faisceaux caractères

Soit  $k$  la clôture algébrique d'un corps fini  $\mathbb{F}_q$ , de caractéristique notée  $p$ , et soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique réductif connexe sur  $k$  qui est défini sur  $\mathbb{F}_q$ . Nous noterons  $F$  l'endomorphisme de Frobenius associé à la structure  $\mathbb{F}_q$ -rationnelle de  $\mathbf{G}$  et  $G = \mathbf{G}^F$  le groupe (fini) des points de  $\mathbf{G}$  fixés par  $F$ .

Si  $g$  et  $h$  sont des éléments de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{K}$  un sous-groupe de  $\mathbf{G}$ , nous poserons  ${}^g\mathbf{K} := g\mathbf{K}g^{-1}$  et  $g^h := h^{-1}gh$ . Nous fixons un sous-groupe de Borel  $\mathbf{B}$  (dont nous notons  $\mathbf{U}$  le radical unipotent) de  $\mathbf{G}$  ainsi qu'un tore maximal  $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ . Soit  $W := N_G(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  le groupe de Weyl de  $\mathbf{G}$  relatif à  $\mathbf{T}$ . Si  $w \in W$ , nous en notons  $\dot{w}$  un représentant dans  $N_G(\mathbf{T})$ .

Un système local  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbf{T}$  est dit *Kummerien* s'il existe un entier positif  $n$ , inversible dans  $k$ , tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n} \cong \hat{\mathbb{Q}}_\ell$ . Nous noterons  $\mathcal{S}(\mathbf{T})$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes locaux Kummeriens de rang 1 sur  $\mathbf{T}$ . Soient  $\mathbf{G}^*$  un groupe dual de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{T}^*$  un tore dual de  $\mathbf{T}$  contenu dans  $\mathbf{G}^*$ . Nous fixons une fois pour toutes un isomorphisme de groupes abstraits  $\mathcal{S}(k^\times) \xrightarrow{\sim} k^\times$ , lequel induit un isomorphisme

$$\lambda_{\mathbf{T}} : \mathcal{S}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^*. \tag{1}$$

Un élément  $w$  de  $W$  peut être considéré comme un automorphisme  $w : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  en posant  $w(t) := \dot{w}t\dot{w}^{-1}$  ( $t \in \mathbf{T}$ ). Le groupe  $W$  agit sur  $\mathcal{S}(\mathbf{T})$  par  $w : \mathcal{L} \mapsto (w^{-1})^*\mathcal{L}$ , où  $(w^{-1})^*$  désigne la prise de l'image réciproque sous  $w^{-1} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ .

Soit  $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$ . Nous posons

$$W_{\mathcal{L}} = W_{\mathcal{L}}^{\mathbf{G}} := \{w \in W : (w^{-1})^*\mathcal{L} = \mathcal{L}\}. \tag{2}$$

Ce groupe est noté  $W'_{\mathcal{L}}$  en [7, (2.2.1)].

Soit  $\mathcal{B}$  la variété des sous-groupes de Borel de  $\mathbf{G}$  et, pour  $w \in W$ , soit  $O(w)$  la sous-variété de  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$  définie par

$$O(w) := \{(\mathbf{B}', \mathbf{B}'') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \text{il existe } g \in \mathbf{G} \text{ tel que } {}^g\mathbf{B}' = \mathbf{B} \text{ and } {}^g\mathbf{B}'' = \dot{w}\mathbf{B}\}.$$

Soient

$$Y_w := \{(g, \mathbf{B}') \in \mathbf{G} \times \mathcal{B} : (\mathbf{B}', {}^g\mathbf{B}') \in O(w)\}$$

et  $\pi_w : Y_w \rightarrow \mathbf{G}$  le morphisme défini par la première projection :  $\pi_w(g, \mathbf{B}') := g$ . Posons

$$\dot{Y}_w := \{(g, h\mathbf{U}) \in \mathbf{G} \times (\mathbf{G}/\mathbf{U}) : g^h \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

Soit  $\text{pr}_{\dot{w}} : \mathbf{B}w\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{T}$  l'application définie par

$$\text{pr}_{\dot{w}}(u\dot{w}tu') := t, \quad \text{pour } u, u' \in \mathbf{U} \text{ et } t \in \mathbf{T}.$$

L'application  $(g, h\mathbf{U}) \mapsto \text{pr}_{\dot{w}}(g^h)$  de  $\dot{Y}_w$  vers  $\mathbf{T}$  est  $\mathbf{T}$ -équivariante à l'égard à la fois de l'action  $t_0 : (g, h\mathbf{U}) \mapsto (g, ht_0^{-1}(\mathbf{U}))$  de  $\mathbf{T}$  sur  $\dot{Y}_w$  et de l'action  $t_0 : t \mapsto (t_0^{\dot{w}}tt_0^{-1})$  de  $\mathbf{T}$  sur lui-même. Par conséquent, si  $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$  et  $w \in W_{\mathcal{L}}$ , l'image réciproque  $\hat{\mathcal{L}}$  de  $\mathcal{L}$  sous l'application  $\dot{Y}_w \rightarrow \mathbf{T}$  est  $\mathbf{T}$ -équivariante. L'application  $\dot{Y}_w \rightarrow Y_w$  définie par  $(g, h\mathbf{U}) \mapsto (g, {}^h\mathbf{B})$  étant une fibration principale de groupe  $\mathbf{T}$  (pour l'action définie ci-dessus de  $\mathbf{T}$  sur  $\dot{Y}_w$ ), il existe un unique système local de rang 1,  $\tilde{\mathcal{L}}$  sur  $Y_w$  dont l'image réciproque sous  $\dot{Y}_w \rightarrow Y_w$  est  $\hat{\mathcal{L}}$ . La classe d'isomorphisme de  $\tilde{\mathcal{L}}$  ne dépend pas du choix du représentant  $\dot{w}$  de  $w$ . Nous posons, pour  $w \in W_{\mathcal{L}}$  :

$$K_w^{\mathcal{L}} := (\pi_w)_! \tilde{\mathcal{L}} \in D_c^b(\mathbf{G}, \bar{\mathbb{Q}}_{\ell}). \tag{3}$$

**Définition 2.1.** (Voir [7, Définition 2.10, Prop. 2.9(a)].) Les *faisceaux caractères* sur  $\mathbf{G}$  sont les faisceaux pervers irréductibles sur  $\mathbf{G}$  qui sont des constituants des  ${}^p\mathcal{H}^i(K_w^{\mathcal{L}})$ , pour  $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$ ,  $w \in W_{\mathcal{L}}$  et  $i \in \mathbb{Z}$ .

En particulier, les faisceaux caractères sur le tore  $\mathbf{T}$  sont les faisceaux pervers  $\mathcal{L}[d]$  ( $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$ ), où  $d = \dim \mathbf{T}$ .

Nous noterons  $\hat{\mathbf{G}}$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux caractères sur  $\mathbf{G}$ . Pour  $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$  fixé, nous noterons  $\hat{G}_{\mathcal{L}}$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux caractères qui sont des constituants des  ${}^p\mathcal{H}^i(K_w^{\mathcal{L}})$  pour  $w \in W_{\mathcal{L}}$  et  $i \in \mathbb{Z}$ . L'ensemble  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathcal{L}}$  est fini et dépend seulement de la  $W$ -orbite de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbf{T})$  [7, 2.10]. Les ensembles  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathcal{L}}$  forment une partition de  $\hat{\mathbf{G}}$  [7, 11.2].

Soit  $\mathbf{P}$  un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$ , de radical unipotent noté  $\mathbf{U}_{\mathbf{P}}$  et de sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$ . Soient  $\pi_{\mathbf{P}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{L}$  et  $\iota_{\mathbf{P}} : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{G}$  respectivement la projection et l'inclusion canoniques. Suivant [7, §3.8], nous définissons le foncteur  $\text{res}_{\mathbf{LCP}}^{\mathbf{G}} : D_c^b(\mathbf{G}, \bar{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow D_c^b(\mathbf{L}, \bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$  par

$$\text{res}_{\mathbf{LCP}}^{\mathbf{G}}(A) := (\pi_{\mathbf{P}})_! \iota_{\mathbf{P}}^* A(\dim \mathbf{U}_{\mathbf{P}}).$$

Le foncteur de «restriction parabolique» ci-dessus permet de définir une notion de *cuspidalité* pour les faisceaux caractères : un faisceau caractère  $A$  sur  $\mathbf{G}$  est *cuspidal* si, pour tout sous-groupe parabolique propre  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$  de sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$ , on a  $\text{res}_{\mathbf{LCP}}^{\mathbf{G}} A = 0$  dans  $D_c^b(\mathbf{L}, \bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$  (cf. [7, (7.1.1), (7.1.5), (7.1.6)]).

Un foncteur d'« induction parabolique »  $\text{ind}_{\mathbf{LCP}}^{\mathbf{G}}$  est construit en [7, §4.1]. Nous rappellerons à la Section 5 la construction de l'induit parabolique d'un faisceau caractère cuspidal. L'une des propriétés importantes de ce dernier est le fait suivant (cf. [7, Theorem 4.4]) : pour tout faisceau caractère  $A$  sur  $\mathbf{G}$ , il existe un sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$  de sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  et un faisceau caractère cuspidal  $A_0$  sur  $\mathbf{L}$  tels que  $A$  soit un facteur direct de  $\text{ind}_{\mathbf{LCP}}^{\mathbf{G}}(A_0)$ .

### 3. Classification des sous-groupes de Lévi admettant un faisceau caractère cuspidal

Supposons  $\mathbf{G}$  semi-simple et quasi-simple. Nous déterminons dans cette section la liste des sous-groupes de Lévi de  $\mathbf{G}$  (à conjugaison près) qui admettent un faisceau caractère cuspidal. Il n'y a rien d'original ici : Lusztig a donné très explicitement en [7] la liste des groupes quasi-simples qui admettent un faisceau caractère cuspidal, et il a également indiqué en *loc. cit.* un procédé pour déterminer si un groupe réductif donné en admet un ou non. Nous nous contentons d'effectuer ce procédé.

Rappelons les étapes de ce procédé maintenant. Soit  $\mathbf{K}$  un groupe réductif, et soit  $\chi$  un caractère du groupe des composantes de son centre  $Z(\mathbf{K})/Z^\circ(\mathbf{K})$ . Soit  $\hat{\mathbf{K}}_\chi^0$  l'ensemble des faisceaux caractères cuspidaux sur  $\mathbf{K}$ , à isomorphisme près, sur lesquels  $Z(\mathbf{K})/Z^\circ(\mathbf{K})$  agit par  $\chi$  :

- Si  $\mathbf{K}$  est semi-simple et quasi-simple, Lusztig a déterminé explicitement pour chaque  $\chi$  si  $\hat{\mathbf{K}}_\chi^0$  est vide ou non vide.
- Si  $\mathbf{K}$  est produit direct des groupes semi-simples et quasi-simples,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \cdots \times \mathbf{K}_n$ , alors  $\hat{\mathbf{K}}_\chi^0$  est non vide si et seulement si  $(\hat{\mathbf{K}}_i)_{\chi|_{\mathbf{K}_i}}^0$  est non vide pour tout  $i$ .
- Si  $\mathbf{K}$  est un quotient central d'un produit direct  $\tilde{\mathbf{K}}$  des groupes semi-simples et quasi-simples, soit  $\pi : \tilde{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{K}$  l'application quotient. Alors  $\hat{\mathbf{K}}_\chi^0$  est non vide si et seulement si  $\hat{\mathbf{K}}_{\chi \circ \pi}^0$  l'est.
- Si  $\mathbf{K}$  est non semi-simple, alors  $\hat{\mathbf{K}}_\chi^0$  est non vide si et seulement si  $(\widehat{\mathbf{K}/Z^\circ(\mathbf{K})})_\chi^0$  l'est.

(En fait, il est également possible d'obtenir un paramétrage explicite de  $\hat{\mathbf{K}}_\chi^0$  au moyen de ce procédé, mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite.)

Les observations suivantes nous seront utiles :

**Lemme 3.1.** *Tout sous-groupe de Lévi d'un groupe algébrique quasi-simple possède au plus un facteur quasi-simple de type différent de  $A$ .*

**Démonstration.** Le graphe de Dynkin d'un groupe quasi-simple et non de type  $A$  doit contenir soit une arête de multiplicité 2 ou 3, soit un nœud de valence 3. Chaque graphe de Dynkin simple contient au plus une telle arête ou un tel nœud.  $\square$

**Corollaire 3.2.** *Si  $\mathbf{G}$  est quasi-simple et à centre connexe, alors tout sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  admettant un faisceau caractère cuspidal est quasi-simple et non de type  $A$ .*

Les résultats de la classification sont résumés dans la Table 1. Pour chaque sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  qui possède un couple cuspidal  $(\Sigma, \mathcal{E})$ , nous indiquons dans la troisième colonne le type du groupe  $\mathbf{M} = Z_{\mathbf{L}}^\circ(\sigma)$ , où  $\sigma \in \Sigma_{\text{ss}}$ . Lorsque  $\mathbf{L}$  possède plusieurs couples cuspidaux, il y a plusieurs possibilités pour  $\mathbf{M}$ .  $\Delta$  désigne l'ensemble des nombres triangulaires, et  $\square$  désigne l'ensemble des nombres carrés.

Table 1  
Sous-groupes de Lévi admettant un faisceau caractère cuspidal.

G	L	M
$SL_{n+1}/\mu_d, d \mid (n+1)_{p'}$	$(A_r)^{(n+1)/(r+1)}, (r+1)d \mid (n+1)_{p'}$ ,	$(A_r)^{(n+1)/(r+1)}$
$Spin_{2n+1} (p \neq 2)$	$B_{r+s} \times (A_1)^{(n-(r+s))/2}, 2r+1, 2s \in \Delta$	$B_r \times D_s \times (A_1)^{(n-(r+s))/2}$
$SO_{2n+1}$	$B_{r+s}, 2r+1, 2s \in \square (p \neq 2)$ $B_r, r \in 2\Delta (p=2)$	$B_r \times D_s (p \neq 2),$ $B_r$
$Sp_{2n} (p \neq 2)$	$C_{r+s}, r+s \notin 2\mathbb{Z}, r, s \in \Delta$	$C_r \times C_s$
$PSP_{2n}$	$C_{r+s}, r+s \in 2\mathbb{Z}, r, s \in \Delta (p \neq 2)$ $C_r, r \in 2\Delta (p=2)$	$C_r \times C_s$ $C_r$
$Spin_{2n} (p \neq 2)$	$D_{r+s} \times (A_1)^{(n-(r+s))/2}, 2r, 2s \in \Delta$	$D_r \times D_s \times (A_1)^k$
$\frac{1}{2} Spin_{2n}, n \in 2\mathbb{Z} (p \neq 2)$	$D_{r+s} \times (A_1)^{(n-(r+s))/2}, 2r, 2s \in \Delta$	$D_r \times D_s \times (A_1)^{(n-(r+s))/2}$
$SO_{2n} (p \neq 2)$	$D_{r+s}, r+s \in 4\mathbb{Z}+2, 2r, 2s \in \square$	$D_r \times D_s$
$PSO_{2n}$	$D_{r+s}, r+s \in 4\mathbb{Z}, 2r, 2s \in \square (p \neq 2)$ $D_r, r \in 4\square (p=2)$	$D_r \times D_s$ $D_r$
$E_6^{sc} (p \neq 3)$	$(A_2)^2$	$(A_2)^2$
$E_6^{ad}$	$E_6$ $D_4$ $E_6$	$A_5 \times A_1 (p \neq 2), E_6$ $(A_1)^4 (p \neq 2), D_4 (p=2)$ $(A_2)^3 (p \neq 3), E_6 (p=3)$
$E_7^{sc} (p \neq 2)$	$(A_1)^3$ (voir l'explication dans le texte)	$(A_1)^3$
$E_7^{ad}$	$E_7$ $D_4$ $E_6$ $E_7$	$A_5 \times A_2 (p \neq 3), E_7 (p=3)$ $(A_1)^4 (p \neq 2), D_4 (p=2)$ $(A_2)^3 (p \neq 3), E_6 (p=3)$ $(A_3)^2 \times A_1 (p \neq 2), E_7 (p=2)$
$E_8$	$D_4$ $E_6$ $E_7$ $E_8 (p \neq 2)$	$(A_1)^4 (p \neq 2), D_4 (p=2)$ $(A_2)^3 (p \neq 3), E_6 (p=3)$ $(A_3)^2 \times A_1 (p \neq 2), E_7 (p=2)$ $(A_4)^2, A_5 \times A_2 \times A_1, D_5 \times A_3, D_8, E_6 \times A_2, E_7 \times A_1, E_8$
$F_4$	$B_2$ $F_4 (p \neq 2)$	$(A_1)^2 (p \neq 2), B_2 (p=2)$ $C_3 \times A_1, A_2 \times A_2, A_3 \times A_1, B_4, F_4$
$G_2$	$G_2$	$A_1 \times \tilde{A}_1, A_2, G_2$



Les cas où la caractéristique est 2 et  $\mathbf{L} = \mathbf{G}$  est de type  $F_4$  ou  $E_8$  ne sont pas traités dans la table. Ce sont les seuls cas pour lesquels l’hypothèse de netteté (« clean » au sens de Lusztig) n’est pas encore connue (voir [10]).

### 3.1. Quotients du groupe spécial linéaire

Le centre de  $SL_{n+1}$  est cyclique de cardinal  $(n + 1)_{p'}$ , où  $(n + 1)_{p'}$  est le plus grand diviseur de  $n + 1$  que  $p$  ne divise pas. Soit  $d$  un entier qui divise  $(n + 1)_{p'}$ , et notons  $\mu_d$  le sous-groupe cyclique central de cardinal  $d$ . Tout groupe semi-simple et quasi-simple de type  $A_n$  est isomorphe à  $SL_{n+1}/\mu_d$  pour un certain  $d$ .

D’autre part, tout sous-groupe de Lévi de  $SL_{n+1}$  est de la forme

$$S(GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_j}), \quad \text{où } n_1 + \cdots + n_j = n + 1,$$

et où  $S(\cdot)$  désigne le sous-groupe des éléments de déterminant 1. Son centre a  $\text{pgcd}(n_1, \dots, n_j)_{p'}$  composantes, et son image dans  $SL_{n+1}/\mu_d$  a  $\text{pgcd}(n_1, \dots, n_j, (n + 1)_{p'}/d)$  composantes.

Un groupe de type  $A_n$  admet un faisceau caractère cuspidal si et seulement si son centre admet un caractère d’ordre  $n + 1$ . Pour que l’image de  $S(GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_j})$  dans  $SL_{n+1}/\mu_d$  admette un faisceau caractère cuspidal, alors, il faut et il suffit que  $n_i$  divise  $\text{pgcd}(n_1, \dots, n_j, (n + 1)_{p'}/d)$  pour tout  $i$ . Mais cela implique que

$$n_1 = \cdots = n_j = \text{pgcd}(n_1, \dots, n_j, (n + 1)_{p'}/d).$$

Posons  $r = n_1 - 1 = \cdots = n_j - 1$ . Alors on voit que  $r + 1$  divise  $(n + 1)_{p'}/d$ , et que  $j = (n + 1)/(r + 1)$ . On conclut qu’un sous-groupe de Lévi admet un faisceau caractère cuspidal si et seulement s’il est de type

$$\underbrace{A_r \times \cdots \times A_r}_{(n+1)/(r+1) \text{ facteurs}}, \quad \text{où } (r + 1) \mid (n + 1)_{p'}/d.$$

### 3.2. Les groupes classiques

En caractéristique 2, tout groupe classique est isomorphe au groupe adjoint du même type. Ces groupes-là seront considérés dans la prochaine section ; pour le moment nous supposons que  $p \neq 2$ .

Considérons d’abord les groupes spéciaux orthogonaux impairs  $SO_{2n+1}$ . Il est bien connu que tout sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  de  $SO_{2n+1}$  est de la forme  $SO_{2k+1} \times GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_j}$ , où  $(2k + 1) + 2n_1 + \cdots + 2n_j = 2n + 1$ . Mais  $GL_{n_i}$  n’admet pas de faisceau caractère cuspidal sauf si  $n_i = 1$ , et donc pour que  $\mathbf{L}$  en admette un, il doit être de la forme  $SO_{2k+1} \times \mathbf{S}$ , où  $\mathbf{S}$  est un tore. En particulier, on a  $\mathbf{L}/Z^\circ(\mathbf{L}) \simeq SO_{2k+1}$ , et Lusztig a décrit en [7, §23.2(c)] des conditions nécessaires sur  $k$  pour que le groupe  $SO_{2k+1}$  admette un faisceau caractère cuspidal.

Pour  $\mathbf{G} = Sp_{2n}$ , le même argument permet de se ramener à [7, §23.2(b)]; et pour  $\mathbf{G} = SO_{2n}$ , à [7, §23.2(d)].

### 3.3. Les groupes adjoints de type classique

Selon le Corollaire 3.2, il suffit de considérer les sous-groupes de Lévi  $\mathbf{L}$  qui sont quasi-simples et du même type que  $\mathbf{G}$ . Si  $\mathbf{G} = PSp_m$  (resp.  $\mathbf{G} = PSO_m$ ), alors il s’ensuit que  $\mathbf{L}/Z^\circ(\mathbf{L}) \simeq$

$\text{PSp}_k$  (resp.  $\mathbf{L}/\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{L}) \simeq \text{PSO}_k$ ) pour un certain  $k \leq m$  (rappelons que  $\mathbf{L}$  est à centre connexe). Si  $p \neq 2$ , on se réfère à [7, §23.2(a), (c)] pour trouver les conditions nécessaires sur  $k$ . Si  $p = 2$ , les résultats analogues se trouvent en [7, §22].

### 3.4. Les groupes Spin et $\frac{1}{2}$ Spin

Considérons d’abord le groupe  $\text{Spin}_{2n+1}$ . Son centre est de cardinal 2, et donc *a priori* il est possible qu’un sous-groupe de Lévi contenant des facteurs de type  $A_1$  puisse admettre un faisceau caractère cuspidal. Notons  $P$  son réseau des poids, et  $Q$  son réseau radiciel. On peut identifier  $Q$  avec  $\mathbb{Z}^n$ , et  $P$  avec le réseau engendré par  $Q$  et l’élément

$$\lambda = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right).$$

Posons

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (1 \text{ dans la } i\text{-ème coordonnée}),$$

et prenons  $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}$  comme l’ensemble des racines simples. Soit  $\mathbf{L}$  un sous-groupe de type  $B_k \times (A_1)^j$ . On peut supposer que l’ensemble des racines simples de  $\mathbf{L}$  est

$$\begin{aligned} & \{e_1 - e_2\} \cup \{e_3 - e_4\} \cup \dots \cup \{e_{2j-1} - e_{2j}\} \\ & \cup \{e_{n-k+1} - e_{n-k+2}, e_{n-k+2} - e_{n-k+3}, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}, \end{aligned}$$

où  $n - k + 1 > 2j$ . Le groupe  $\mathbf{Z}(\mathbf{L})/\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{L})$  possède un caractère non trivial si et seulement si un multiple de  $\lambda$  appartient au réseau radiciel de  $\mathbf{L}$ . Il est donc clair que  $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$  est non connexe si et seulement si  $2j = n - k$ . Ensuite, si  $2j = n - k$ , alors  $\mathbf{L}$  admet un faisceau caractère cuspidal si et seulement si le groupe  $\text{Spin}_{2k+1}$  en admet un. Pour ce dernier, Lusztig a donné les conditions sur  $k$  en [7, §23.2(e)].

Les arguments pour les groupes  $\text{Spin}_{2n}$  et  $\frac{1}{2} \text{Spin}_{2n}$  sont semblables. Pour ceux-ci, on peut identifier le réseau radiciel  $Q$  avec l’ensemble  $\{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum m_i \in 2\mathbb{Z}\}$ . Le réseau des poids  $P$  de  $\text{Spin}_{2n}$  est engendré par  $Q$  et les deux éléments

$$\lambda = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \mu = (0, \dots, 0, 1).$$

Le réseau des poids de  $\frac{1}{2} \text{Spin}_{2n}$  est engendré par  $Q$  et  $\lambda$  seul. L’ensemble des racines simples est  $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$ . Considérons d’abord un sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$  de type  $D_k \times (A_1)^j$ , dont les racines simples sont

$$\begin{aligned} & \{e_1 - e_2\} \cup \{e_3 - e_4\} \cup \dots \cup \{e_{2j-1} - e_{2j}\} \\ & \cup \{e_{n-k+1} - e_{n-k+2}, e_{n-k+2} - e_{n-k+3}, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}, \end{aligned}$$

où  $n - k + 1 > 2j$ . Le poids  $\mu$  ne joue aucun rôle dans la question, car le caractère du centre de  $\mathbf{G}$  correspondant est de restriction nulle aux facteurs de type  $A_1$ . Quant à  $\lambda$ , le même calcul

Table 2

Sous-groupes de Lévi quasi-simples et non de type A dans les groupes exceptionnels.

<b>G</b>	<b>L</b>
$E_6$	$D_4, D_5, E_6$
$E_7$	$D_4, D_5, D_6, E_6, E_7$
$E_8$	$D_4, D_5, D_6, D_7, E_6, E_7, E_8$
$F_4$	$B_2, B_3, C_3, F_4$
$G_2$	$G_2$

qu'on a fait pour  $\text{Spin}_{2n+1}$  montre qu'il donne lieu à un caractère non trivial de  $Z(\mathbf{L})/Z^\circ(\mathbf{L})$  si et seulement si  $2j = n - k$ . Si  $\mathbf{G} = \text{Spin}_{2n}$  (resp.  $\frac{1}{2}\text{Spin}_{2n}$ ), son sous-groupe de type  $D_k \times (A_1)^{(n-k)/2}$  admet un faisceau caractère cuspidal si et seulement si  $\text{Spin}_{2k}$  (resp.  $\frac{1}{2}\text{Spin}_{2k}$ ) en admet un. Pour ce dernier, voir [7, §23.2(e), (f)].

Enfin, si  $n$  est impair, le centre de  $\text{Spin}_{2n}$  est cyclique de cardinal 4 ; en effet,  $P/Q$  est engendré par l'image de  $\lambda$ , et on a  $2\lambda \equiv \mu \pmod{Q}$ . On est donc obligé de considérer aussi les sous-groupes de Lévi  $\mathbf{L}$  contenant des facteurs de type  $A_3$ . Pourtant, le calcul du paragraphe précédent montre que le caractère du centre correspondant à  $\mu$  est toujours de restriction nulle aux facteurs de type A. Par conséquent, bien que le caractère correspondant à  $\lambda$  soit d'ordre 4, sa restriction aux facteurs de type A n'est que d'ordre 2. Un tel  $\mathbf{L}$  n'admet donc pas de faisceau caractère cuspidal.

### 3.5. Les groupes adjoints de type exceptionnel

D'après le Corollaire 3.2, il suffit de considérer les sous-groupes de Lévi quasi-simples et non de type A. Tous les tels groupes sont indiqués dans la Table 2.

Parmi ceux-ci, les groupes adjoints de type  $B_3, C_3, D_5, D_6, D_7$  n'admettent pas de faisceaux caractères cuspidaux [7, §22, §23.2(a), (c)]. Tous les autres en admettent au moins un. Les groupes de type  $B_2$  et  $D_4$  en caractéristique 2 sont traités en [7, §22], et en caractéristique impaire dans la Proposition 23.2(c) de *loc. cit.* Pour la liste des  $\mathbf{M}$  possibles dans  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ , respectivement, voir les Propositions 20.3(a), 20.3(c), 21.2, 21.3, 20.6 de [7].

### 3.6. Le groupe simplement connexe de type $E_6$

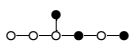
Si  $p = 3$ ,  $E_6^{\text{sc}}$  est isomorphe à  $E_6^{\text{ad}}$ . Supposons donc que  $p \neq 3$ . Puisque le centre de  $E_6^{\text{sc}}$  est de cardinal 3, on sait que pour tout sous-groupe de Lévi  $\mathbf{L}$ , le cardinal de  $Z(\mathbf{L})/Z^\circ(\mathbf{L})$  vaut soit 1, soit 3. Parmi les sous-groupes figurant dans la Table 2, ceux de type  $D_4$  et  $D_5$  sont à centre connexe (parce qu'un groupe quasi-simple de type D ne peut pas avoir un centre possédant trois composantes) et donc ont déjà été traités. Pour  $E_6^{\text{sc}}$  lui-même, voir [7, Proposition 20.3].

Nous devons maintenant considérer les sous-groupes de Lévi non quasi-simples contenant un facteur de type  $A_2$ . Il y en a deux, de types  $A_2$  et  $A_2 \times A_2$ . Un calcul semblable à ceux que l'on a fait pour les groupes Spin montre que le sous-groupe de Lévi de type  $A_2$  est à centre connexe. (Il suffit de vérifier, d'après les descriptions en [2] des réseaux de poids et des réseaux radiciels, qu'il n'existe pas de poids qui n'est pas dans le réseau radiciel de  $A_2$  mais dont un multiple y est.) En revanche, le centre de  $A_2 \times A_2$  a trois composantes, et donc ce groupe-là admet un faisceau caractère cuspidal.

### 3.7. Le groupe simplement connexe de type $E_7$

Si  $p = 2$ ,  $E_7^{\text{sc}}$  est isomorphe à  $E_7^{\text{ad}}$ . Supposons donc  $p$  impair. Le centre de  $E_7^{\text{sc}}$  est alors de cardinal deux. Il n'est pas donc aussi facile que dans le cas de  $E_6^{\text{sc}}$  de conclure que les divers sous-groupes propres de Lévi figurant dans la Table 2 ont centre connexe. Il faut plutôt vérifier ce fait dans chaque cas par un calcul dans le réseau des poids, en utilisant les données de [2].

Des calculs semblables montrent que le seul sous-groupe de Lévi (à conjugaison près) contenant des facteurs de type  $A_1$  et possédant un couple cuspidal est celui de type  $A_1 \times A_1 \times A_1$  qui correspond au graphe suivant :



( $E_7^{\text{sc}}$  possède plusieurs sous-groupes de Lévi non conjugués de type  $A_1 \times A_1 \times A_1$ . Les autres sous-groupes de ce type n'ont pas de faisceaux caractères cuspidaux).

## 4. Groupes d'inertie

Soit  $\mathbf{L}$  un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$ , admettant un faisceau caractère cuspidal. Nous notons  $\mathbf{L}_{\text{der}}$  le groupe dérivé de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{T}_1$  la composante neutre  $Z^\circ(\mathbf{L})$  du centre de  $\mathbf{L}$  (donc  $\mathbf{L} = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_1)$ ). Les faisceaux caractères cuspidaux sur  $\mathbf{L}$  peuvent être décrits de la manière suivante (cf. [7, Prop. 3.12]). Soit  $A_0$  un faisceau caractère cuspidal sur  $\mathbf{L}$ . Il existe une classe de conjugaison  $\mathcal{O}$  de  $\mathbf{L}/\mathbf{T}_1$ , d'image réciproque dans  $\mathbf{L}$  sous la projection naturelle  $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}/\mathbf{T}_1$  notée  $\Sigma$ , ainsi qu'un système local irréductible  $\mathcal{E}$  sur  $\Sigma$ , image réciproque, sous l'application naturelle  $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}/\mathbf{L}_{\text{der}} \times \mathbf{L}/\mathbf{T}_1$ , de  $\mathcal{L}' \boxtimes \mathcal{E}'$ , où  $\mathcal{L}'$  est un système local Kummerien de rang 1 sur le tore  $\mathbf{L}/\mathbf{L}_{\text{der}}$  et  $\mathcal{E}'$  est un système local irréductible  $\mathbf{L}$ -équivariant (pour l'action de conjugaison) sur  $\mathcal{O}$ , tels que

$$A_0 = \text{IC}(\overline{\Sigma}, \mathcal{E})[\dim \Sigma],$$

étendu à l'ensemble de  $\mathbf{L}$  par 0 sur le complémentaire dans  $\mathbf{L}$  de l'adhérence  $\overline{\Sigma}$  de  $\Sigma$  (autrement dit  $A_0$  est l'extension perverse de  $\mathcal{E}$  à  $\mathbf{L}$ ). Le couple  $(\Sigma, \mathcal{E})$  est cuspidal au sens de [6, 2.4].

Nous posons  $\mathfrak{t} := (\mathbf{L}, \Sigma, \mathcal{E})$  et

$$W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} := \{n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}) : n \Sigma n^{-1} = \Sigma, \text{ad}(n)^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\} / \mathbf{L}. \tag{4}$$

Le but de cette section est de décrire le groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ , appelé le *groupe d'inertie* de  $\mathfrak{t}$ , et en particulier de démontrer qu'il est produit semi-direct d'un groupe de Coxeter fini par un groupe abélien fini (un tel groupe est appelé un *groupe de Coxeter (fini) étendu*).

### 4.1. Description comme groupe de Coxeter étendu

Notons  $\Phi$  le système de racines de  $\mathbf{G}$  relatif à  $\mathbf{T}$ . Soit  $\mathbf{B} \supset \mathbf{T}$  un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{G}$  contenu dans  $\mathbf{P}$  et soit  $\Phi^+ \subset \Phi$  le sous-ensemble des racines positives correspondant. Nous désignons par  $\Pi$  une base de  $\Phi$ .

Soit  $J \subset \Pi$  le sous-ensemble de  $\Pi$  correspondant à  $\mathbf{L}$  (i.e.,  $\mathbf{L}$  est engendré par  $\mathbf{T}$  et les sous-groupes radiciels  $\mathbf{U}_\alpha$  où  $\alpha \in J$ ). Notons  $V$  l'espace vectoriel réel sur lequel le groupe  $W$  agit via sa représentation naturelle et  $V_J$  le sous-espace de  $V$  engendré par les racines appartenant à  $J$ .

Si  $\alpha \in \Phi$  est une racine telle qu'il existe  $w' \in W$  avec  $w'(J \cup \{\alpha\}) \subset \Pi$ , alors  $J \cup \{\alpha\}$  est un ensemble de racines fondamentales pour le système de racines qu'il engendre et le sous-groupe de réflexions correspondant contient un élément  $w_{J \cup \{\alpha\}}$  vérifiant  $w_{J \cup \{\alpha\}}(J \cup \{\alpha\}) = -J \cup \{-\alpha\}$  (l'unique élément de longueur maximale de ce sous-groupe). De même, soit  $w_J$  l'élément de longueur maximale du sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions correspondant à  $J$  (i.e., le groupe  $W^L$ ). Nous poserons alors

$$v(\alpha, J) := w_{J \cup \{\alpha\}} \cdot w_J.$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} \Gamma_t &:= \left\{ \alpha \in \Phi : \begin{array}{l} \text{il existe } w' \in W \text{ tel que } w'(J \cup \{\alpha\}) \subset \Pi, \\ v(\alpha, J) \in W_t^G \text{ et } v(\alpha, J)^2 = 1 \end{array} \right\} \\ \Gamma_t^+ &:= \Gamma_t \cap \Phi^+, \quad \Omega_t := \{w \in W_t^G : w\Gamma_t^+ \subset \Gamma_t^+\} \\ \Phi_t &:= \{\alpha + V_J : \alpha \in \Gamma_t\}, \end{aligned} \tag{5}$$

et notons  $\bar{W}_t^G$  le sous-groupe de  $W_t^G$  engendré par les  $v(\alpha, J)$  pour  $\alpha \in \Gamma_t$ .

**Proposition 4.1.** *Le groupe  $\bar{W}_t^G$  est un sous-groupe de réflexions normal de  $W_t^G$ , de système de racines  $\Phi_t$ . Le groupe  $W_t^G$  est le produit semi-direct de  $\bar{W}_t^G$  par  $\Omega_t$  :*

$$W_t^G = \bar{W}_t^G \rtimes \Omega_t.$$

**Démonstration.** On vérifie que  $\bar{W}_t^G$  est normal dans  $W_t^G$ . Pour cela il suffit de remarquer que  $\Gamma_t$  est stable par  $W_t^G$ . Or,  $W_L^G = \{w \in W : w(J) = J\}$  (cf. par exemple [3, Cor. 3]). Soient  $\alpha \in \Gamma_t$  et  $w \in W_t^G$ . On a donc

$$v(w(\alpha), J) = v(w(\alpha), w(J)) = wv(\alpha, J)w^{-1}.$$

Donc :

$$w'w^{-1}(J \cup \{w(\alpha)\}) = w'w^{-1}(wJ \cup \{w(\alpha)\}) = w'(J \cup \{\alpha\}) \subset \Pi,$$

$v(w(\alpha), J) \in W_t^G$  et  $v(w(\alpha), J)^2 = 1$ , i.e.,  $w(\alpha) \in \Gamma_t$ .

D'autre part, posons

$$\Gamma_L^G := \left\{ \alpha \in \Phi : \begin{array}{l} \text{il existe } w' \in W \text{ tel que } w'(J \cup \{\alpha\}) \subset \Pi, \\ \text{et } v(\alpha, J)^2 = 1 \end{array} \right\}$$

et

$$\Phi_L^G := \{\alpha + V_J : \alpha \in \Gamma_L^G\}.$$

D'après [3, Theorem 6],  $\Phi_L^G$  détermine un système de racines dans un sous-espace du quotient  $V/V_J$ . Montrons que  $\Phi_t$  est un sous-système de ce système de racines. Soient  $\alpha, \beta \in \Gamma_t$ . Puisque  $v(\alpha, J) \in W_t^G$ , on a  $v(\alpha, J)(\beta) \in \Gamma_t$ . Il s'ensuit que  $v(\alpha, J)(\beta + V_J) \in \Phi_t$ . Donc  $\Phi_t$  est un sous-système de  $\Phi_L^G$ .

Le groupe de Weyl du système  $\Phi_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ , noté  $\bar{W}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ , est le groupe engendré par les  $v(\alpha, J)$  pour  $\alpha \in \Phi_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  [3, Theorem 6]. Le groupe de Weyl du sous-système  $\Phi_{\mathfrak{t}}$  est donc le sous-groupe de  $\bar{W}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  engendré par les  $v(\alpha, J)$  pour  $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{t}}$ , *i.e.*, le groupe  $\bar{W}_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ . Autrement dit,  $\bar{W}_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  est un groupe de réflexions de système de racines  $\Phi_{\mathfrak{t}}$ . Il suffit alors d'appliquer [3, Lemma 2].  $\square$

#### 4.2. Interprétation duale

Cette sous-section n'est vraiment complète que dans le cas où le centre de  $\mathbf{G}$  est connexe et est alors due à Lusztig et Shoji. Nous n'utiliserons pas les résultats de cette sous-section dans la suite de l'article, mais il nous a paru utile de les mentionner afin, d'une part, d'aider à une meilleure compréhension du groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  et, d'autre part, à souligner le parallèle existant entre ce groupe et le groupe  $W_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}$  que nous introduirons plus tard.

Soit  $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})$  tel que  $A_0 \in \hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$ . Nous posons

$$W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}} := \{w \in N_{\mathbf{W}}(\mathbf{L}) : (w^{-1})^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}\} / \{w \in W_{\mathbf{L}} : (w^{-1})^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}\}. \tag{6}$$

**Lemme 4.2.** *Le groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  est contenu dans  $W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}}$ . Si, ou bien  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$  contient un unique faisceau caractère cuspidal (ce qui est le cas en particulier si le centre de  $\mathbf{G}$  est connexe et  $\mathbf{G}$  est de type classique), ou bien  $\mathbf{L}$  est de type exceptionnel, alors  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} = W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}}$ .*

**Démonstration.** Nous commençons par démontrer l'inclusion. Soit  $w \in W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ . Nous choisissons un représentant  $\dot{w}$  de  $w$  dans  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ . L'élément  $\dot{w}$  envoie  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$  sur  $\hat{\mathbf{L}}_{(w^{-1})^* \mathcal{L}}$ . D'autre part, puisque  $w \in W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ , on a  $\text{ad}(\dot{w})^* A_0 \simeq A_0$ . Par conséquent,  $A_0$  appartient à la fois à  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$  et à  $\hat{\mathbf{L}}_{(w^{-1})^* \mathcal{L}}$ . Il résulte alors de [7, Prop. 11.2] que les systèmes locaux  $\mathcal{L}$  et  $(w^{-1})^* \mathcal{L}$  appartiennent à la même  $W_{\mathbf{L}}$ -orbite dans  $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ , *i.e.*, il existe  $w' \in W_{\mathbf{L}}$  tel que  $\text{ad}(\dot{w}w')^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ . Autrement dit, le groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  est contenu dans  $W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}}$ .

Soit maintenant  $w \in W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}}$  et soit  $\dot{w}$  un représentant de  $w$  dans  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ . L'ensemble  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$  est stable sous  $\text{ad}(\dot{w})$ . D'autre part,  $\text{ad}(\dot{w})A_0$  est un faisceau caractère cuspidal, puisque  $A_0$  en est un. Si  $A_0$  est l'unique faisceau caractère cuspidal appartenant à  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$ , on a donc  $\text{ad}(\dot{w})A_0 \simeq A_0$ , *i.e.*,  $w \in W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ .

Nous supposons dorénavant  $\mathbf{L}$  de type exceptionnel et  $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$  (si  $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ , le résultat est trivialement vrai :  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} = W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}} = \{1\}$ ). Les seuls cas à considérer sont donc ceux où  $\mathbf{L}$  est de type  $E_6$  ou  $E_7$  et à centre connexe (car sous-groupe de Lévi du groupe adjoint de type  $E_7$  ou du groupe de type  $E_8$ , *cf.* Table 1). L'égalité a été prouvée par Shoji dans ces deux cas en [12, 4.2].  $\square$

La dernière partie de cette sous-section a pour but de décrire plus précisément le groupe  $W_{\mathbf{L}, \mathcal{L}}^{\mathbf{G}}$ . Soit  $s \in \mathbf{T}^*$ . Notons  $Z_{\mathbf{L}^*}(s)$  le centralisateur de  $s$  dans  $\mathbf{L}^*$  et  $Z_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s)$  la composante neutre de ce dernier. Notons  $A_{\mathbf{L}^*}(s) := Z_{\mathbf{L}^*}(s)/Z_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s)$  le groupe des composantes de  $Z_{\mathbf{L}^*}(s)$  et notons  $W_s^{\mathbf{L}^*, \circ}$  le groupe de Weyl de  $Z_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s)$ . Posons

$$W_s^{\mathbf{L}^*} := \{w \in W^{\mathbf{L}^*} : w_s = s\}.$$

Le groupe  $W_s^{\mathbf{L}^*}$  s'écrit :

$$W_s^{\mathbf{L}^*} = W_s^{\mathbf{L}^*, \circ} \rtimes \Omega_s^{\mathbf{L}^*}, \quad \text{où } \Omega_s^{\mathbf{L}^*} \simeq A_{\mathbf{L}^*}(s).$$

Rappelons qu'un élément semi-simple  $s$  de  $\mathbf{L}^*$  est dit *quasi-isolé* (resp. *isolé*) si  $Z_{\mathbf{L}^*}(s)$  (resp.  $Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$ ) n'est contenu dans aucun sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique propre de  $\mathbf{L}^*$ , i.e., de manière équivalente, si  $W_s^{\mathbf{L}^*}$  (resp.  $W_s^{\mathbf{L}^*, \circ}$ ) n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de  $W^{\mathbf{L}^*}$ .

**Lemme 4.3.** *Si  $s$  est isolé dans  $\mathbf{L}^*$ , on a l'égalité suivante :*

$$N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s))/Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s) = N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(\mathbf{L}^*)/Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s).$$

**Démonstration.** Soient  $g \in N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(\mathbf{L}^*)$  et  $l \in Z_{\mathbf{L}^*}(s)$ . On a  $glg^{-1} \in Z_{\mathbf{L}^*}(s)$ . Donc  $l \mapsto glg^{-1}$  définit un automorphisme de  $Z_{\mathbf{L}^*}(s)$ . La composante neutre  $Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$  de  $Z_{\mathbf{L}^*}(s)$  étant un sous-groupe caractéristique de ce dernier, il vient  $glg^{-1} \in Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$  si  $l \in Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$ . L'inclusion  $N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(\mathbf{L}^*) \subset N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s))$  s'ensuit.

Réciproquement, soit  $g \in N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s))$ . Alors  $g$  normalise la composante neutre du centre de  $Z_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$ , laquelle, puisque l'élément  $s$  est isolé dans  $\mathbf{L}^*$ , est égale à la composante neutre  $Z^\circ(\mathbf{L}^*)$  du centre de  $\mathbf{L}^*$ . Par conséquent  $g$  normalise  $Z_{\mathbf{G}^*}(Z^\circ(\mathbf{L}^*)) = \mathbf{L}^*$ . L'assertion du lemme s'ensuit.  $\square$

Nous supposons désormais que  $s$  est l'image de  $\mathcal{L}$  sous l'isomorphisme  $\lambda_{\mathbf{T}}$  considéré en (1). Le groupe  $W_s^{\mathbf{L}^*}$  est alors isomorphe au groupe  $W_{\mathcal{L}}^{\mathbf{L}}$  défini en (2) (avec  $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ ).

D'autre part, puisque  $\hat{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}}$  contient un faisceau caractère cuspidal (le faisceau caractère  $A_0$ ), les propriétés suivantes sont satisfaites :

- L'élément semi-simple  $s$  est quasi-isolé dans  $\mathbf{L}^*$ , cf. [7, (17.12.4)].
- Il existe une *famille cuspidale*  $\mathcal{F}$  dans  $\text{Irr}(W_s^{\mathbf{L}^*})$ , cf. [7, (17.13.11)] (la famille correspondant à  $A_0$ ). La famille  $\mathcal{F}$  est elle-même déterminée par une famille cuspidale, stable sous  $\Omega_s^{\mathbf{L}^*}$ , de  $\text{Irr}(W_s^{\mathbf{L}^*, \circ})$ , associée à un certain groupe fini  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ , et la famille  $\mathcal{F}$  est associée au groupe  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \rtimes \Omega_s^{\mathbf{L}^*}$ , d'après [7, 17.1–17.8].

**Proposition 4.4.** *Si le centre de  $\mathbf{G}$  est connexe, alors*

$$W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} \xrightarrow{\sim} N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(Z_{\mathbf{L}^*}(s))/Z_{\mathbf{L}^*}(s),$$

où  $s$  est l'image de  $\mathcal{L}$  sous l'isomorphisme  $\lambda_{\mathbf{T}}$ . En particulier, le groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  est alors un groupe de Coxeter.

**Démonstration.** Le centre de  $\mathbf{G}$  étant connexe, il en est de même du centre de  $\mathbf{L}$ . Par conséquent les centralisateurs  $Z_{\mathbf{G}^*}(s)$  et  $Z_{\mathbf{L}^*}(s)$  sont connexes eux aussi. Puisque  $\text{Irr}(W_s^{\mathbf{L}^*})$  contient une famille cuspidale, la propriété (5.7.1) de [4] est satisfaite, ainsi que remarqué en [5, (8.2.1)]. Il résulte alors de [4, Theorem 5.9] que le groupe  $N_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(Z_{\mathbf{L}^*}(s))/Z_{\mathbf{L}^*}(s)$  est un groupe de Coxeter.

L'hypothèse de connexité du centre de  $\mathbf{G}$  impliquant d'autre part que tout élément quasi-isolé est en fait isolé, il résulte alors des Lemmes 4.2 et 4.3 que ce groupe de Coxeter est isomorphe au groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ .  $\square$

**Remarque 4.5.** Lorsque le centre de  $\mathbf{G}$  n'est pas connexe, le groupe  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  n'est pas en général un groupe de Coxeter. Par exemple, si  $\mathbf{G}$  est le groupe spécial linéaire,  $W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  est produit semi-direct

d'un groupe de Coxeter par un groupe cyclique non trivial si  $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$  (cf. par exemple [14, §7.8]), on a  $\bar{W}_t^{\mathbf{G}} \simeq \mathbf{N}_{Z_{\mathbf{G}^*}(s)}(\mathbf{Z}_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s))/\mathbf{Z}_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s)$  et  $\Omega_t \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{G}^*}(s)/\mathbf{A}_{\mathbf{L}^*}(s)$  dans ce cas.

### 4.3. Introduction du Frobenius

Dorénavant nous supposons que  $\mathbf{L}$  est un sous-groupe de Lévi  $F$ -stable d'un sous-groupe parabolique  $F$ -stable  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$ . Nous posons alors :

$$\mathcal{Z}_t^{\mathbf{G}} := \{n \in \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}) : F(n \Sigma n^{-1}) = \Sigma, \text{ad}(n)^* F^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\} / \mathbf{L}. \tag{7}$$

On a

$$\mathcal{Z}_t^{\mathbf{G}} = w_1 W_t^{\mathbf{G}}, \quad \text{avec } w_1 \in W.$$

Notons  $\gamma_1$  l'automorphisme de  $W_t^{\mathbf{G}}$  défini par

$$\gamma_1(w) := w_1^{-1} F^{-1}(w) w_1. \tag{8}$$

Nous pouvons choisir (et nous choisissons) l'élément  $w_1$  de sorte que  $\gamma_1$  stabilise  $\bar{W}_t^{\mathbf{G}}$  et  $\Omega_t$  dans la décomposition  $W_t^{\mathbf{G}} = \bar{W}_t^{\mathbf{G}} \rtimes \Omega_t$  obtenue à la Proposition 4.1.

**Remarque 4.6.** L'ensemble  $\mathcal{Z}_t^{\mathbf{G}}$  a aussi été introduit par Shoji en [11, §5.15] et [14, §6.8]. Dans le cas particulier où  $\mathbf{L}$  est un tore et où le centre de  $\mathbf{G}$  est connexe, la Proposition 4.4 permet d'identifier le groupe  $W_t^{\mathbf{G}}$  au groupe de Weyl du groupe  $Z_{\mathbf{G}^*}(s)$  (qui est connexe). Le groupe  $Z_{\mathbf{G}^*}(s)$  est alors stable sous l'endomorphisme de Frobenius  $F \circ \text{ad}(w_1)$ . Dans la théorie des caractères des groupes réductifs finis, l'importance de l'élément  $w_1$  est reflétée par l'existence (démontrée en [5, Theorem 4.23]) d'une bijection entre l'ensemble des caractères irréductibles de  $G^F$  appartenant à la série définie par la classe de conjugaison dans  $(\mathbf{G}^*)^F$  de  $s$  et l'ensemble des caractères irréductibles unipotents du groupe des points de  $Z_{\mathbf{G}^*}(s)$  fixés par  $F \circ \text{ad}(w_1)$ .

Pour tout élément  $w$  de  $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$ , nous choisissons un représentant  $\dot{w}$  de  $w$  dans  $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$  ainsi qu'un élément  $g_{\dot{w}}$  de  $\mathbf{G}$  tel que

$$g_{\dot{w}}^{-1} F(g_{\dot{w}}) = F(\dot{w}). \tag{9}$$

Nous posons

$$\mathbf{L}^w := \text{ad}(g_{\dot{w}})\mathbf{L} = g_{\dot{w}}\mathbf{L}g_{\dot{w}}^{-1}. \tag{10}$$

Puisque  $\mathbf{L}$  est  $F$ -stable, il vient :

$$\text{ad}(g_w^{-1})F(\mathbf{L}^w) = g_w^{-1}F(g_{\dot{w}}\mathbf{L}g_{\dot{w}}^{-1})g_w = F(\dot{w})F(\mathbf{L})F(\dot{w}^{-1}) = F(\dot{w}\mathbf{L}\dot{w}^{-1}) = F(\mathbf{L}) = \mathbf{L},$$

autrement dit,  $\mathbf{L}^w$  est  $F$ -stable. Le groupe  $\mathbf{L}^w$  est sous-groupe de Lévi du sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}^w := \text{ad}(g_{\dot{w}})\mathbf{P}$ , ce dernier n'est pas  $F$ -stable en général.

Soit  $z \in Z_t^{\mathbf{G}}$ . Nous posons

$$\Sigma^z := \text{ad}(g_z)\Sigma = g_z\Sigma g_z^{-1}. \tag{11}$$



Il vient

$$\text{ad}(g_z^{-1})F(\Sigma^z) = F(\dot{z})F(\Sigma)F(\dot{z}^{-1}) = F(\dot{z}\Sigma\dot{z}^{-1}) = \Sigma,$$

autrement dit,  $\Sigma^z$  est  $F$ -stable.

Nous posons d’autre part :

$$\mathcal{E}^z := \text{ad}(g_z^{-1})^* \mathcal{E}. \tag{12}$$

Il existe donc un isomorphisme  $\text{ad}(\dot{z})^* F^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ . Appliquant  $\text{ad}(g_z^{-1})^*$  à celui-ci, en utilisant l’égalité  $F \circ \text{ad}(F^{-1}(g)) = \text{ad}(g) \circ F$ , nous obtenons

$$\text{ad}(g_z^{-1})^* \text{ad}(\dot{z})^* F^* \mathcal{E} = \text{ad}(F^{-1}(g_z^{-1}))^* F^* \mathcal{E} = F^* \text{ad}(g_z^{-1})^* \mathcal{E} = F^* \mathcal{E}^z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^z, \tag{13}$$

i.e.,  $\mathcal{E}^z$  est  $F$ -stable.

Pour tout  $z \in Z_t^{\mathbf{G}}$ , le triplet  $t^z := (\mathbf{L}^z, \Sigma^z, \mathcal{E}^z)$  est donc  $F$ -stable. En particulier,  $t^{w_1}$  est  $F$ -stable.

**5. Induction de faisceaux caractères cuspidaux**

*5.1. Le complexe induit  $K^z$*

Soit  $z \in Z_t^{\mathbf{G}}$ , où  $t = (\mathbf{L}, \Sigma, \mathcal{E})$ . Nous commençons par rappeler la construction de [7, §8.1 et 10.6]. Soit  $\Sigma_{\text{reg}}^z$  l’ouvert dense de  $\Sigma^z$  défini par

$$\Sigma_{\text{reg}}^z := \{g \in \Sigma^z : Z^\circ(g_{\text{ss}}) \subset \mathbf{L}^z\},$$

où  $g_{\text{ss}}$  désigne la partie semi-simple de  $g$ . Considérons le diagramme

$$\Sigma^z \xleftarrow{\alpha^z} \hat{Y} \xrightarrow{\beta^z} \tilde{Y}^z \xrightarrow{\pi^z} Y^z,$$

où  $Y := \bigcup_{g \in \mathbf{G}} g \Sigma_{\text{reg}}^z g^{-1}$  (une sous-variété irréductible lisse, localement fermée de  $\mathbf{G}$ , qui ne dépend pas de  $z$ ) et

$$\tilde{Y}^z := \{(g, x\mathbf{L}^z) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{L} : x^{-1}gx \in \Sigma_{\text{reg}}^z\},$$

$$\hat{Y}^z := \{(g, x) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} : x^{-1}gx \in \Sigma_{\text{reg}}^z\},$$

$$\alpha^z(g, x) := x^{-1}gx, \quad \beta^z(g, x) := (g, x\mathbf{L}^z), \quad \pi^z(g, x\mathbf{L}^z) := g.$$

Le système local  $\alpha^* \mathcal{E}^z$  sur  $\hat{Y}^z$  étant  $\mathbf{L}^z$ -équivariant pour l’action (par translation à droite sur le second membre) de  $\mathbf{L}^z$  sur  $\hat{Y}^z$ , il existe un système local  $\tilde{\mathcal{E}}^z$  sur  $\tilde{Y}^z$  tel que  $(\alpha^z)^* \mathcal{E}^z \simeq (\beta^z)^* \tilde{\mathcal{E}}^z$ . Soit

$$K^z = K^{\mathbf{G}}(\mathbf{L}^z, \Sigma^z, \mathcal{E}^z) := \text{IC}(\bar{Y}, (\pi^z)_* \tilde{\mathcal{E}}^z)[\dim Y^z] \tag{14}$$

étendu à  $\mathbf{G}$  tout entier par zéro sur le complémentaire de  $\bar{Y}$ . Puisque  $\pi^z$  est une fibration principale,  $(\pi^z)_* \tilde{\mathcal{E}}^z$  est un système local semi-simple, et  $K^z$  est donc un faisceau pervers sur  $\mathbf{G}$ . On a  $K^z = \text{ind}_{\mathbf{p}^z}^{\mathbf{G}}(\text{IC}(\bar{\Sigma}^z, \mathcal{E})[\dim \Sigma])$ .

### 5.2. Structure mixte sur $K^{w_1}$

Nous choisissons une fois pour toutes un isomorphisme

$$\varphi_0 : \text{ad}(\dot{w}_1)^* F^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \tag{15}$$

de sorte que, pour tout élément  $x$  de  $\Sigma$  tel que  $(F \circ \text{ad}(\dot{w}_1))(x) = x$ , l'application linéaire, induite par  $\varphi_0$ , de la fibre  $\mathcal{E}_x$  en  $x$  de  $\mathcal{E}$  dans elle-même, ait toutes ses valeurs propres de la forme  $q^{(\dim L - \dim \Sigma)/2}$  fois une racine de l'unité (c'est possible d'après [7, 25.1]). Ce choix est aussi celui fait par Shoji en [11, (1.4.1) et §5.17] et [13, (2.7.1)]. Nous notons alors

$$\varphi_0^{w_1} := \text{ad}(g_{\dot{w}_1}^{-1})^* \circ \varphi_0 : \mathcal{E}^{w_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{w_1} \tag{16}$$

l'isomorphisme induit par  $\varphi_0$  (cf. équation (13)).

Soit alors  $\varphi^{w_1} : F^* K^{w_1} \xrightarrow{\sim} K^{w_1}$  la structure mixte induite par  $\varphi_0^{w_1}$  (cf. [7, (8.1.3)]) de la manière suivante. Chacune des variétés  $Y, \tilde{Y}^{w_1}$  et  $\hat{Y}^{w_1}$  possède une structure  $\mathbb{F}_q$ -rationnelle naturelle et l'isomorphisme  $\varphi_0^{w_1}$  induit un isomorphisme  $F^* \tilde{\mathcal{E}}^{w_1} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{E}}^{w_1}$  de systèmes locaux sur  $\tilde{Y}^{w_1}$ , puis un isomorphisme  $F^*(\pi^{w_1})_! \tilde{\mathcal{E}}^{w_1} \xrightarrow{\sim} (\pi^{w_1})_! \tilde{\mathcal{E}}^{w_1}$  de systèmes locaux sur  $Y^{w_1}$ , et finalement un isomorphisme

$$\varphi^{w_1} : F^* K^{w_1} \xrightarrow{\sim} K^{w_1} \tag{17}$$

dans  $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ , où  $\mathcal{P}(\mathbf{G})$  est la catégorie des faisceaux pervers sur  $\mathbf{G}$ .

### 5.3. Décomposition de $K^{w_1}$

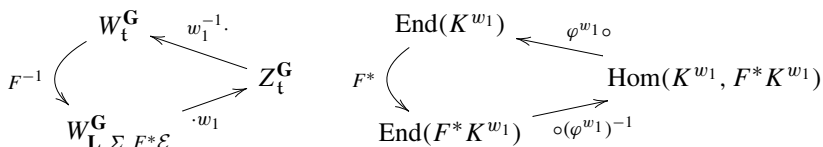
L'algèbre d'endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{P}\mathbf{G}}(K^{w_1})$  de  $K^{w_1}$  dans  $\mathbf{G}$  est isomorphe à l'algèbre de groupe  $\mathbb{Q}_\ell W_t^{\mathbf{G}}$  tordue par un 2-cocycle (cf. [7, 10.2]).

**Hypothèse 5.1.** Nous supposons le cocycle trivial.

L'hypothèse 5.1 est en particulier satisfaite dans les cas suivants :

- (1) le centre  $Z(\mathbf{G})$  de  $\mathbf{G}$  est connexe et le groupe  $\mathbf{G}/Z(\mathbf{G})$  est simple, cf. [11, Lem. 5.9] ;
- (2)  $\mathbf{G}$  est le groupe spécial linéaire, cf. [14, (6.7.1)].

L'isomorphisme  $\tilde{\mathbb{Q}}_\ell W_t^{\mathbf{G}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{P}\mathbf{G}}(K^{w_1})$  donne alors lieu à un isomorphisme entre les deux diagrammes suivants :



On a donc

$$\gamma_1(\theta) = \varphi^{w_1} \circ F^*(\theta) \circ (\varphi^{w_1})^{-1}, \quad \text{pour tout } \theta \in \text{End}(K^{w_1}). \tag{18}$$

Soit  $\tilde{W}_t^G$  le produit semi-direct de  $W_t^G$  par le groupe cyclique engendré par  $\gamma_1$ . Nous notons  $\text{Irr}(W_t^G)_{\text{ex}}$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $W_t^G$  qui s'étendent en des représentations de  $\tilde{W}_t^G$ . Pour  $E \in \text{Irr}(W_t^G)_{\text{ex}}$ , nous choisissons une extension  $\tilde{E}$  de  $E$  qui est définie sur  $\mathbb{Q}$ .

Le complexe  $K^{w_1}$  admet la décomposition suivante :

$$K^{w_1} = \bigoplus_A A \otimes V_A, \tag{19}$$

où  $V_A = \text{Hom}_{\mathcal{P}_G}(A, K^{w_1})$  est une représentation irréductible de  $W_t^G$ .

Les composantes irréductibles de  $K^{w_1}$  sont des faisceaux caractères  $F$ -stables et tout faisceau caractère  $F$ -stable sur  $G$  est composante d'un induit de ce type. Nous choisissons une structure mixte  $\varphi_A : F^*A \xrightarrow{\sim} A$ .

Nous munissons  $V_A$  d'une structure de  $\tilde{W}_t^G$ -module comme suit : pour tout  $v \in V_A$ , posons

$$v_A \cdot v := \varphi^{w_1} \circ F^*(v) \circ \varphi_A^{-1}. \tag{20}$$

Il est facile de vérifier que cette structure est bien définie : pour tout  $\theta \in \text{End}(K)$ , on a

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta)(v_A \cdot v) &= (\varphi^{w_1} \circ F^*(\theta) \circ (\varphi^{w_1})^{-1}) \circ (\varphi^{w_1} \circ F^*(v) \circ \varphi_A^{-1}) \\ &= \varphi^{w_1} \circ F^*(\theta \circ v) \circ \varphi_A^{-1} = v_A \cdot (\theta \circ v). \end{aligned}$$

Soit  $E$  une représentation irréductible de  $W_t^G$  isomorphe à  $V_A$ . Quitte à remplacer  $\varphi_A : F^*A \xrightarrow{\sim} A$  par le produit de celui-ci par une racine de l'unité (cf. [11, (5.17)]), nous pouvons supposer que  $V_A$  est isomorphe à  $\tilde{E}$  comme représentation de  $\tilde{W}_t^G$ , pour tout  $A = A_E$  où  $V_A$  correspond à  $\gamma_1^{-1}$  sur  $\tilde{E}$ .

5.4. Fonctions caractéristiques

Si  $\mathbf{K}$  est un faisceau pervers  $F$ -stable sur  $G$  muni d'une structure mixte  $\varphi : F^*\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ , nous noterons  $\chi_{\mathbf{K},\varphi} : G \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$  la fonction caractéristique de  $(\mathbf{K}, \varphi)$ , qui est une fonction centrale sur  $G$  et est définie par

$$\chi_{\mathbf{K},\varphi}(g) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\varphi, \mathcal{H}_g^i(\mathbf{K})), \tag{21}$$

où  $\mathcal{H}_g^i(\mathbf{K})$  désigne la fibre en  $g \in G$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^i(\mathbf{K})$  de  $\mathbf{K}$ .

On a

$$\chi_{K^{w_1},\varphi^{w_1}} = \sum_{E \in \text{Irr}(W_t^G)_{\text{ex}}} \text{Tr}(\gamma_1 w, \tilde{E}) \chi_{A_E}, \tag{22}$$

où nous avons noté simplement  $\chi_{A_E}$  la fonction caractéristique du couple  $(A_E, \varphi_{A_E})$ . Des arguments du type de ceux utilisés en de [7, 10.4, 10.6] et [11, (2.17), (5.17)] montrent alors que

$$\chi_{A_E} = |W_t^G|^{-1} \sum_{w \in W_t^G} \text{Tr}(\gamma_1 w, \tilde{E}) \chi_{K^{w_1 w}, \varphi^{w_1 w}}, \tag{23}$$

où l'isomorphisme  $\varphi^{w_1 w} : F^*K^{w_1 w} \xrightarrow{\sim} K^{w_1 w}$  est induit par  $\varphi_0$ .

### 6. La formule du caractère

Pour déterminer la valeur de  $\chi_{A_E}$  en un élément  $g$  de  $G$ , nous sommes ramenés, grâce à l'équation (23), à calculer la valeur en  $g$  de la fonction caractéristique  $\chi_{K^z, \varphi^z}$  pour tout élément  $z$  de  $Z_t^G$ . Pour cela, nous écrivons  $g = \sigma v$ , où  $\sigma$  est semi-simple et  $v$  est unipotent et commute à  $\sigma$  et nous allons utiliser la formule du caractère qui suit.

#### 6.1. Rappels

Nous posons  $\mathbf{H} := Z_G^\circ(\sigma)$  et  $H = \mathbf{H}^F$ . Soit  $w \in W_L^G$ . Nous notons  $\Sigma_{ss}^w$  l'ensemble des parties semi-simples des éléments de  $\Sigma^w$ , où  $\Sigma^w$  est défini au moyen de l'équation (11).

Soit  $x \in G$  tel que  $x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{ss}^w$ . Nous posons

$$M_x^w := Z_H(xg_z T_1 g_z^{-1} x^{-1}) = xZ_{L^w}^\circ(x^{-1}\sigma x)x^{-1}. \tag{24}$$

Dans le cas particulier où  $w = 1$  (l'élément neutre de  $W_L^G$ ), on a

$$M_x := M_x^1 = (xLx^{-1}) \cap \mathbf{H}. \tag{25}$$

Le groupe  $M_x$  est un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{H}$ .

Soit  $z$  un élément fixé de  $Z_t^G$ . Nous notons alors  $\mathcal{O}_x^z$  l'ensemble des éléments unipotents  $v'$  de  $\mathbf{H}$  tels que  $\sigma v' \in x\Sigma^z x^{-1}$ . L'ensemble  $\mathcal{O}_x^z$  est une classe unipotente de  $M_x^z$  (cf. [7, Proposition 7.11(c)]).

Soit  $\mathcal{F}_x^z$  le système local sur  $\mathcal{O}_x^z$ , défini comme l'image réciproque de  $\mathcal{E}^z$  sous l'application  $v \mapsto x^{-1}\sigma v x$  de  $\mathcal{O}_x^z$  dans  $\Sigma^z$ . Cette application étant définie sur  $\mathbb{F}_q$ , l'isomorphisme  $\varphi_0^z : F^*\mathcal{E}^z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^z$  induit un isomorphisme  $\varphi_x^z : F^*\mathcal{F}_x^z \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x^z$ .

Soit maintenant  $1 \boxtimes \mathcal{F}_x^z$  l'image réciproque de  $\mathcal{F}_x^z$  sous l'application  $Z^\circ(M_x^z)\mathcal{O}_x^z \rightarrow \mathcal{O}_x^z$ . Le couple  $(Z^\circ(M_x^z)\mathcal{O}_x^z, 1 \boxtimes \mathcal{F}_x^z)$  est un couple cuspidal  $F$ -stable sur  $M_x^z$ .

Soit  $A_x^z = \text{IC}(Z^\circ(M_x^z)\mathcal{O}_x^z, 1 \boxtimes \mathcal{F}_x^z)$ . C'est un faisceau caractère cuspidal sur  $M_x^z$ . Nous considérons le complexe induit sur  $\mathbf{H}$

$$K_x^{z, \mathbf{H}} := K^{\mathbf{H}}(M_x^z, Z^\circ(M_x^z)\mathcal{O}_x^z, 1 \boxtimes \mathcal{F}_x^z), \tag{26}$$

avec la notation (14) appliqué avec  $\mathbf{H}$  au lieu de  $\mathbf{G}$ . La restriction de  $A_x^z$  à la variété unipotente de  $M_x^z$  (et donc celle de  $K_x^{z, \mathbf{H}}$  à la variété unipotente de  $\mathbf{H}$ ) n'est pas identiquement nulle.

La fonction de Green généralisée  $Q_{M_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}}$  sur la variété unipotente de  $\mathbf{H}$  est définie par (cf. [7, (8.3.1)]) :

$$Q_{M_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}}(v) := \chi_{K_x^{z, \mathbf{H}}, \varphi_x^z}(v), \quad \text{pour tout élément unipotent } v \text{ de } \mathbf{H}. \tag{27}$$

Nous noterons  $k_t(z) = k(z)$  la fonction caractéristique  $\chi_{K^z, \varphi^z}$  de  $(K^z, \varphi^z)$ . On a la formule du caractère suivante [7, Theorem 8.5] :

$$k(z)(\sigma v) = |H|^{-1} |L^z|^{-1} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{ss}^z}} |M_x^z| Q_{M_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}}(v). \tag{28}$$

6.2. *Sous-groupes de Lévi dans H*

Nous gardons les notations du paragraphe précédent : en particulier,  $\mathbf{G}$  est un groupe réductif  $F$ -stable ;  $\mathbf{L}$  est un sous-groupe de Lévi  $F$ -stable possédant un couple cuspidal  $(\Sigma, \mathcal{E})$  ;  $\Sigma_{ss}$  est l'ensemble des parties semi-simples des éléments de  $\Sigma$  ; et  $g = \sigma v$  est l'élément en lequel on veut calculer la valeur de  $\chi_{AE}$ .

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_x : x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{ss}\}, \quad \text{où } \mathbf{M}_x = \mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(x\mathbf{T}_1x^{-1}) = x\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^{\circ}(x^{-1}\sigma x)x^{-1}. \quad (29)$$

(On n'exige pas que  $x \in G$  ici.) Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, tout  $\mathbf{M}_x$  est un sous-groupe de Lévi du groupe réductif  $\mathbf{H}$ . Rappelons que les sous-groupes de Lévi d'un groupe réductif à conjugaison près sont paramétrés par les orbites du groupe de Weyl sur l'ensemble des sous-graphes du graphe de Dynkin. En particulier, il y a, à conjugaison près, un nombre fini de sous-groupes de Lévi. Par conséquent,  $\mathcal{M}$  est partitionné en un nombre fini de classes d'équivalence

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_r, \quad (30)$$

où  $\mathbf{M}_x$  et  $\mathbf{M}_y$  sont dits équivalents s'ils sont conjugués sous  $\mathbf{H}$ . (Nous verrons à la Section 7 que si  $\mathbf{G}$  est quasi-simple, alors  $r \leq 2$ , et en fait  $r = 1$  dans la plupart des cas.)

**Remarque 6.1.** Il est à noter que tous les membres de  $\mathcal{M}$  sont conjugués sous  $\mathbf{G}$ , et donc isomorphes. En effet, il est clair que chaque  $\mathbf{M}_x$  est conjugué sous  $\mathbf{G}$  au centralisateur dans  $\mathbf{L}$  d'un élément de  $\Sigma_{ss}$ . Mais il résulte de la définition de  $\Sigma$  que tous les éléments de  $\Sigma_{ss}$  sont conjugués à multiplication par un élément central près, et donc leurs centralisateurs sont conjugués dans  $\mathbf{L}$ .

Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , nous fixons un élément  $g_j \in \mathbf{G}$  tel que  $\mathbf{M}_{g_j} \in \mathcal{M}_j$ . Posons

$$\mathbf{T}_j^{\mathbf{H}} := g_j\mathbf{T}_1g_j^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_j := \mathbf{M}_{g_j} = \mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_j^{\mathbf{H}}). \quad (31)$$

Le groupe  $\mathbf{M}_j$  est un sous-groupe de Lévi  $F$ -stable de  $\mathbf{H}$ . Le tore  $\mathbf{T}_j^{\mathbf{H}}$  est  $F$ -stable et nous notons  $a_j$  l'élément de  $W_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  tel que  $F(a_j)$  soit l'image de  $g_j^{-1}F(g_j)$  dans  $W_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ . Nous posons

$$W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}} := \mathbf{N}_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_j)/\mathbf{M}_j. \quad (32)$$

**Exemple 6.2.** Supposons qu'il existe un élément  $x_1$  de  $G$  tel que  $x_1^{-1}\sigma x_1 \in \Sigma_{ss}^w$ . Pour l'un des  $g_j$ , on peut prendre  $g_j = x_1g\dot{w}$ . On aura alors  $\mathbf{T}_j^{\mathbf{H}} = x_1\mathbf{T}_1^w x_1^{-1}$  et  $\mathbf{M}_j = x_1\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^{\circ}(x_1^{-1}\sigma x_1)x_1^{-1} \subset \mathbf{H}$ . Dans ce cas  $a_j = w$ .

On remarque aussi que  $\mathbf{N}_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_j^{\mathbf{H}}) = \mathbf{N}_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_j)$  et  $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ . De l'application

$$\tilde{\iota}_j : \mathbf{N}_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_j) \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}), \quad h \mapsto g_j^{-1}hg_j \quad (33)$$

se déduit un plongement

$$\iota_j : W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}} \hookrightarrow W_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}. \quad (34)$$

Le morphisme de Frobenius agit à la fois sur  $W_L^G$  et sur tous les  $W_{M_j}^H$ , et l'action de  $F$  est transportée en l'action de  $a_j F$  via  $\iota_j$ . Nous gardons la notation  $F : W_L^G \rightarrow W_L^G$  pour l'automorphisme de  $W_L^G$  induit par le Frobenius, et note  $\eta_j : W_{M_j}^H \rightarrow W_{M_j}^H$  l'automorphisme *inverse* à celui qui est induit par le Frobenius sur  $W_{M_j}^H$ . Il résulte des définitions de  $\tilde{\iota}_j$  et de  $a_j$  que

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}_j(F(h)) &= g_j^{-1} F(h) g_j \\ &= g_j^{-1} F(g_j) F(g_j^{-1} h g_j) F(g_j)^{-1} g_j = F(a_j) F(\tilde{\iota}_j(h)) F(a_j)^{-1}. \end{aligned}$$

Remplaçons  $F(h)$  par son image  $w$  dans  $W_{M_j}^H$  et  $\tilde{\iota}_j$  par  $\iota_j$ . On obtient l'égalité  $\iota_j(w) = F(a_j) F(\iota_j(\eta_j(w))) F(a_j)^{-1}$ , ou, autrement dit,

$$a_j \iota_j(\eta_j(w)) = F^{-1}(\iota_j(w)) a_j. \tag{35}$$

Désormais, nous identifions  $W_{M_j}^H$  avec son image par  $\iota_j$ . Si  $w \in W_{M_j}^H$ , il n'y a donc aucune ambiguïté dans la notation  $F(w) : c$ 'est l'image sous le morphisme de Frobenius de  $w$  en tant qu'élément de  $W_L^G$ .

### 6.3. Actions de Frobenius et doubles classes dans $W_L^G$

Il résulte de (35) que  $W_{M_j}^H$  agit sur  $a_j W_{M_j}^H$  par  $F^{-1}$ -conjugaison ; *i.e.*, pour tout  $w \in W_{M_j}^H$ , on a  $F^{-1}(w)(a_j W_{M_j}^H)w^{-1} = a_j W_{M_j}^H$ . De plus, les orbites de cette action sont en bijection avec les classes de  $\eta_j$ -conjugaison dans  $W_{M_j}^H$ , via la bijection évidente  $W_{M_j}^H \leftrightarrow a_j W_{M_j}^H$  donnée par  $w \rightsquigarrow a_j w$ . (Rappelons que deux éléments  $u, v \in W_{M_j}^H$  sont dits  $\eta_j$ -conjugués s'il existe un  $w \in W_{M_j}^H$  tel que  $\eta_j(w)uw^{-1} = v$ .)

Cette situation est parallèle à celle de  $W_t^G$  et  $w_1 W_t^G$ . À savoir,  $W_t^G$  agit sur  $w_1 W_t^G$  par  $F^{-1}$ -conjugaison, et les orbites de cette action sont en bijection avec les classes de  $\gamma_1$ -conjugaison dans  $W_t^G$ .

Nous notons  $\sim_{\eta_j}$ ,  $\sim_{\gamma_1}$ , et  $\sim_{F^{-1}}$  les relations de  $\eta_j$ -,  $\gamma_1$ -, et  $F^{-1}$ -conjugaison, respectivement. Si  $w \in W_t^G$ , son stabilisateur sous la  $\gamma_1$ -conjugaison sera noté  $Z_{\gamma_1}(w)$ . Si  $w \in W_{M_j}^H$  (resp.  $w \in W_L^G$ ), alors  $Z_{\eta_j}(w)$  (resp.  $Z_{F^{-1}}(w)$ ) est défini de manière semblable.

Ensuite, nous notons  $\tilde{W}_{M_j}^H$  le produit semi-direct de  $W_{M_j}^H$  par le groupe cyclique engendré par  $\eta_j$ .  $\text{Irr}(W_{M_j}^H)_{\text{ex}}$  désigne l'ensemble des représentations irréductibles qui admettent une action de  $\tilde{W}_{M_j}^H$ . Pour tout  $E' \in \text{Irr}(W_{M_j}^H)_{\text{ex}}$ , nous fixons une fois pour toutes une extension  $\tilde{E}'$  en représentation irréductible de  $\tilde{W}_{M_j}^H$ .

Les calculs de la Section 6.5 entraîneront une comparaison de l'action de  $W_{M_j}^H$  sur  $a_j W_{M_j}^H$  et celle de  $W_t^G$  sur  $w_1 W_t^G$ . Nous posons

$$\mathcal{N}_j := W_t^G \backslash W_L^G / W_{M_j}^H.$$

Dans chaque double classe  $\underline{v} \in \mathcal{N}_j$ , choisissons, une fois pour toutes, un représentant  $w_{\underline{v}}$ . Nous posons

$$W(\underline{v}) = w_1 W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} \cap F^{-1}(w_{\underline{v}})(a_j W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})w_{\underline{v}}^{-1}, \tag{36}$$

et nous définissons deux plongements comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda : W(\underline{v}) &\rightarrow W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}, & \lambda(\underline{w}) &= \eta_j^{-1}(a_j^{-1} F^{-1}(w_{\underline{v}}^{-1})\underline{w}w_{\underline{v}}), \\ \kappa : W(\underline{v}) &\rightarrow W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}, & \kappa(\underline{w}) &= \gamma_1^{-1}(w_1^{-1}\underline{w}). \end{aligned}$$

Nous remarquons que si l'on remplace  $w_{\underline{v}}$  par  $w_{\underline{v}}v$ , où  $v \in W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}$ , alors  $W(\underline{v})$  est inchangé, car  $a_j W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}$  est stable sous  $F^{-1}$ -conjugaison par  $v$ . D'autre part, si l'on remplace  $w_{\underline{v}}$  par  $yw_{\underline{v}}$ , où  $y \in W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ , alors  $W(\underline{v})$  est remplacé par son  $F^{-1}$ -conjugué  $F^{-1}(y)W(\underline{v})y^{-1} \subset w_1 W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$ .

**Lemme 6.3.** *Soit  $t \in \underline{v}$ , et posons*

$$P(t) := \{(y, z) \in W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} \times W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}} : yw_{\underline{v}}z = w_1^{-1}F^{-1}(t)a_j\}.$$

Alors  $|P(t)| = |W(\underline{v})|$ .

**Démonstration.** Montrons le lemme d'abord dans le cas où  $t = w_{\underline{v}}$ . Si  $yw_{\underline{v}}z = w_1^{-1}F^{-1}(w_{\underline{v}})a_j$ , alors  $w_1y = F^{-1}(w_{\underline{v}})a_jz^{-1}w_{\underline{v}}^{-1}$ , et donc  $w_1y \in W(\underline{v})$ . L'application  $\phi : P(w_{\underline{v}}) \rightarrow W(\underline{v})$  définie par  $(y, z) \mapsto w_1y$  est injective puisque  $z$  est déterminé par  $y$ . D'autre part, cette application est aussi surjective : si  $w \in W(\underline{v})$ , alors posons  $y = w_1^{-1}w \in W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}}$  et  $z = (a_j^{-1}F^{-1}(w_{\underline{v}}^{-1})ww_{\underline{v}})^{-1} \in W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}$ . Il est clair que  $yw_{\underline{v}}z = w_1^{-1}f^{-1}(w_{\underline{v}})a_j$ , et donc  $(y, z) \in P(w_{\underline{v}})$  et  $\phi(y, z) = w$ .

Ensuite, si  $t \neq w_{\underline{v}}$ , posons  $W'(\underline{v}) = w_1 W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}} \cap F^{-1}(t)(a_j W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})t^{-1}$ . D'une part, l'argument du paragraphe précédent montre que  $|P(t)| = |W'(\underline{v})|$ , et d'autre part, les remarques qui précèdent le lemme montrent que  $|W(\underline{v})| = |W'(\underline{v})|$ .  $\square$

Nous introduisons maintenant une famille d'accouplements, paramétrée par les  $\mathcal{N}_j$ , qui relient les ensembles  $\text{Irr}(W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}})_{\text{ex}}$  et  $\text{Irr}(W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})_{\text{ex}}$ . Soit  $\underline{v} \in \mathcal{N}_j$ . Si  $E \in \text{Irr}(W_{\mathfrak{t}}^{\mathbf{G}})_{\text{ex}}$  et  $E' \in \text{Irr}(W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})_{\text{ex}}$ , on pose

$$\langle E, E' \rangle_{\underline{v}} := \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\underline{w} \in W(\underline{v})} \text{Tr}(\gamma_1 \kappa(\underline{w}), \tilde{E}) \text{Tr}(\eta_j \lambda(\underline{w}), \tilde{E}'). \tag{37}$$

### 6.4. Fonctions de Green généralisées

Pour tout  $j$  et tout  $w \in W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}$ , nous choisissons un représentant  $\dot{w} \in N_{\mathbf{H}}(\mathbf{M}_j)$  ainsi qu'un élément  $h_{\dot{w}} \in \mathbf{H}$  tel que  $h_{\dot{w}}^{-1}F(h_{\dot{w}}) = F(\dot{w})$ . Ensuite, posons

$$\mathbf{M}_j^w = h_{\dot{w}} \mathbf{M}_j h_{\dot{w}}^{-1}.$$

Les  $\mathbf{M}_j^w$  sont tous  $F$ -stables.  $\mathbf{M}_j^w$  et  $\mathbf{M}_j^{w'}$  sont conjugués sous  $H$  si et seulement si  $w$  et  $w'$  sont  $\eta_j$ -conjugués dans  $W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}$ .

Révisons la construction de la fonction de Green généralisée  $Q_{\mathbf{M}_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}}$ . Nous allons d’abord vérifier que sa définition ne dépend pas de  $x$ , mais seulement du groupe  $\mathbf{M}_x^z$ . (C’est-à-dire, si  $\mathbf{M}_x^z = \mathbf{M}_y$ , alors  $Q_{\mathbf{M}_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}} = Q_{\mathbf{M}_y^z, \mathcal{O}_y^z, \mathcal{F}_y^z, \varphi_y^z}^{\mathbf{H}}$ .) De plus, si  $\mathbf{M}_x^z$  et  $\mathbf{M}_y^z$  sont conjugués sous  $H$ , alors leurs fonctions de Green respectives sont égales.

**Remarque 6.4.** Nous supposons que les groupes  $\mathbf{M}_x^z$  et  $\mathbf{M}_y^z$  égaux et que, soit  $\mathbf{H}$ , soit  $\mathbf{L}$ , est égal à  $\mathbf{G}$ . L’égalité des groupes  $\mathbf{M}_x^z$  et  $\mathbf{M}_y^z$  est alors équivalente à celle de  $x\mathbf{L}^z x^{-1}$  et de  $y\mathbf{L}^z y^{-1}$  (en effet, si  $\mathbf{H} = \mathbf{G}$ , nous avons  $\mathbf{M}_x = x\mathbf{L}^z x^{-1}$ , et si  $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ , nous avons  $x\mathbf{L}^z x^{-1} = \mathbf{G}$ , et, par conséquent,  $\mathbf{M}_x^z = \mathbf{H}$ ). Il existe alors  $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$  tel que  $y = nx$  et l’orbite unipotente  $\mathcal{O}_y^z$  s’écrit

$$\mathcal{O}_y^z = \{v'' \in \mathbf{G} : \sigma v'' \in nx \Sigma^z x^{-1} n^{-1}\} = \{v'' \in \mathbf{G} : \sigma(n^{-1} v'' n) \in x \Sigma^z x^{-1}\},$$

puisque  $\sigma$  est central dans  $\mathbf{G}$ , autrement dit,  $\mathcal{O}_y^z = n\mathcal{O}_x^z n^{-1}$ .

**Lemme 6.5.** Si  $\mathbf{M}_x^z = \mathbf{M}_y^z$ , alors  $Q_{\mathbf{M}_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}} = Q_{\mathbf{M}_y^z, \mathcal{O}_y^z, \mathcal{F}_y^z, \varphi_y^z}^{\mathbf{H}}$ .

**Démonstration.** Nous supposons les groupes  $\mathbf{M}_x^z$  et  $\mathbf{M}_y^z$  égaux.

• *Égalité de  $\mathcal{O}_x^z$  et de  $\mathcal{O}_y^z$ .* Si  $\mathbf{M}_x^z = \mathbf{M}_y^z = \mathbf{G}$ , on a en particulier  $\mathbf{H} = \mathbf{G}$ , et donc il résulte de la Remarque 6.4 que  $\mathcal{O}_x^z = \mathcal{O}_y^z$ .

Nous supposons dorénavant  $\mathbf{M}_x^z = \mathbf{M}_y^z \neq \mathbf{G}$ . Lorsque  $\mathbf{G}$  est un groupe de type exceptionnel, la Table 1 montre que les seuls cas à considérer sont les suivants :

- (1)  $\mathbf{G} = E_7^{\text{ad}}$  ou  $\mathbf{G} = E_8$  et  $\mathbf{M}_x^z = x\mathbf{L}^z x^{-1} = E_6$  ( $p = 3$ ) : d’après [7, Proposition 20.3(a)] la classe unipotente régulière de  $\mathbf{M}_x^z$  est la seule à porter un système local cuspidal,
- (2)  $\mathbf{G} = E_8$ ,  $\mathbf{M}_x^z = x\mathbf{L}^z x^{-1} = E_7$  ( $p = 2$ ) : d’après [7, Proposition 20.3(c)] la classe unipotente régulière de  $\mathbf{M}_x^z$  est la seule à porter un système local cuspidal,
- (3)  $\mathbf{G} = \mathbf{L} = E_8$ ,  $\mathbf{M}_x^z = E_7 \times A_1$  ( $p \neq 2$ ) : il n’y a pas de système local cuspidal à support unipotent dans  $E_7$  lorsque  $p \neq 2$ , donc ce cas ne se produit pas,
- (4)  $\mathbf{G} = \mathbf{L} = E_8$ ,  $\mathbf{M}_x^z = E_6 \times A_2$  ( $p \neq 2$ ) :
  - (a) si  $p \neq 3$ , d’après [7, Proposition 20.3] la classe unipotente  $E_6(a_3)$  est la seule à porter des système locaux cuspidaux,
  - (b) si  $p = 3$ , la classe unipotente régulière de  $E_6$  est la seule à porter des système locaux cuspidaux.

Dans chacun des cas énumérés ci-dessus, il y a donc au plus une classe unipotente portant des système locaux cuspidaux, donc nécessairement  $\mathcal{O}_x^z = \mathcal{O}_y^z$ .

• *Isomorphie de  $\mathcal{F}_x^z$  et de  $\mathcal{F}_y^z$ .* Dans chacun des cas (1), (2) et (4), la Remarque 6.4 s’applique et montre qu’il existe  $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$  tel que  $y = nx$ . D’après [7, (8.3.2)], pour définir la fonction de Green généralisée  $Q_{\mathbf{M}_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^{\mathbf{H}}$ , nous aurions pu remplacer  $\mathcal{E}^z$  par un système local  $\mathcal{E}_1^z$  défini comme l’image réciproque sous l’application naturelle  $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}/\mathbf{L}_{\text{der}} \times \mathbf{L}/\mathbf{T}_1$ , de  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell} \boxtimes (\mathcal{E}')^z$ , où  $(\mathcal{E}')^z$  est un système local irréductible  $\mathbf{L}$ -équivariant sur  $\mathcal{O}$ . Nous savons, d’après [6, Theorem 9.2], que le groupe  $W_{\mathbf{L}, \Sigma, \mathcal{E}_1}^{\mathbf{G}}$  est isomorphe à  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$ . L’élément  $n$  vérifie donc  $(\text{ad}(n))^* \mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_1$ . Nous avons vu que  $\mathcal{O}_x^z = \mathcal{O}_y^z$ . Il s’ensuit que  $\mathcal{F}_x^z \simeq \mathcal{F}_y^z$ .



• *Indépendance de la structure mixte.* L’argument qui suit est inspiré de celui utilisé par Shoji dans la preuve de [13, Lemma 4.5]. Nous notons encore  $\varphi_0^z$  l’isomorphisme  $\varphi_0^z : F^* \mathcal{E}_1^z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1^z$  dont la restriction à  $F^*(\mathcal{E}'^z)$  coïncide avec celle de  $\varphi_0^z : F^* \mathcal{E}^z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^z$ . Par définition de l’isomorphisme  $\varphi_x^z : F^* \mathcal{F}_x^z \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x^z$ , on a

$$\mathrm{Tr}(\varphi_x^z, (\mathcal{F}_x^z)_{v'}) = \mathrm{Tr}(\varphi_0^z, (\mathcal{E}_1^z)_{x^{-1}\sigma v'_x}), \quad \text{pour tout } v' \in (\mathcal{O}_x^z)^F.$$

Notons  $\bar{n}$  l’image de  $n$  par la projection  $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}/\mathbf{T}_1$ . L’action par conjugaison de  $\bar{n}$  sur  $\mathbf{L}/\mathbf{T}_1$  induit un isomorphisme  $(\mathrm{ad}\bar{n})^* \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ . Il en résulte que  $\mathrm{Tr}((\varphi')^z, (\mathcal{E}')^z_{p(x^{-1}\sigma v'_x)}) = \mathrm{Tr}((\varphi')^z, (\mathcal{E}')^z_{p(y^{-1}\sigma v'_y)})$ , où  $p$  est la projection naturelle de  $\Sigma^z$  sur  $\Sigma^z/\mathbf{T}_1^z$ . L’égalité de  $\mathrm{Tr}(\varphi_x^z, (\mathcal{F}_x^z)_{v'})$  et de  $\mathrm{Tr}(\varphi_y^z, (\mathcal{F}_y^z)_{v'})$  s’ensuit. La structure mixte ne dépend donc que de  $\mathbf{M}_x^z$ .  $\square$

Pour tout  $w \in W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}$ , posons

$$Q_w^{\mathbf{H}} := \text{la fonction de Green généralisée associée à } \mathbf{M}_j^w. \tag{38}$$

D’après le paragraphe précédent,  $Q_w^{\mathbf{H}}$  est bien définie, et

$$Q_w^{\mathbf{H}} = Q_{w'}^{\mathbf{H}} \quad \text{si } w \text{ et } w' \text{ sont } \eta_j\text{-conjugués.}$$

Enfin, pour tout  $E' \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})_{\mathrm{ex}}$ , nous notons  $Q_{E'}^{\mathbf{H}}$  la fonction sur la variété unipotente de  $\mathbf{H}$  définie par :

$$Q_{E'}^{\mathbf{H}} := \frac{1}{|W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}|} \sum_{w' \in W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}} \mathrm{Tr}(\eta_j w', \tilde{E}') Q_{w'}^{\mathbf{H}}. \tag{39}$$

Il s’ensuit que

$$Q_{w'}^{\mathbf{H}}(v) = \sum_{E' \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})_{\mathrm{ex}}} \mathrm{Tr}(\eta_j w', \tilde{E}') Q_{E'}^{\mathbf{H}}(v), \quad \text{pour tout élément unipotent } v \text{ de } H.$$

### 6.5. Le résultat principal

Dans cette section, nous établissons le résultat principal en trois étapes. La première étape (le Lemme 6.6) consiste à modifier la formule (27) de manière qu’il n’y reste aucune mention d’éléments de  $G$ . Dans la seconde étape (le Lemme 6.7), on fait intervenir les ensembles de doubles classes  $\mathcal{N}_j$  dans la formule. Cela permet enfin d’écrire au Théorème 6.8 la formule cherchée pour  $\chi_{A_E}$ .

**Lemme 6.6** (cf. [9, Proposition 2.16]). *Pour tout  $z \in Z_{\mathfrak{t}}^G$ , on a*

$$k(z)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \frac{|Z_{F^{-1}}(z)|}{|W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}}|} \sum_{\substack{w' \in W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}} \\ a_j w' \sim_{F^{-1}z}}} Q_{w'}^{\mathbf{H}}.$$

**Démonstration.** D’après (27), on a

$$k(z)(\sigma v) = |H|^{-1} |L^z|^{-1} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{ss}^z}} |M_x^z| Q_{M_x^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^H(v). \tag{40}$$

Soit  $x \in G$  tel que  $x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{ss}^z$ . L’équation (24) montre que  $M_x^z$  appartient à l’ensemble  $\mathcal{M}$ , et donc à un certain  $\mathcal{M}_j$ , où  $j = j(z, x) \in \{1, \dots, r\}$ . Ensuite,  $M_x^z$ , étant  $F$ -stable, est conjugué sous  $H$  à un  $M_j^{w'}$ , où  $w' \in W_{M_j}^H$  est unique à  $\eta_j$ -conjugaison près. Cette classe de  $\eta_j$ -conjugaison sera notée  $C(z, x)$ . Pour tout  $w' \in C(z, x)$ , on a

$$Q_{w'}^H = Q_{M_j^z, \mathcal{O}_x^z, \mathcal{F}_x^z, \varphi_x^z}^H.$$

De plus, si  $w' \in C(z, x)$ , le fait que

$$Z^\circ(M_j^{w'}) = g_{\dot{w}'} g_j \mathbf{T}_1 g_j^{-1} g_{\dot{w}'}^{-1} \quad \text{et} \quad Z^\circ(M_x^z) = x g_z \mathbf{T}_1 g_z^{-1} x^{-1}$$

sont conjugués sous  $G$  implique que les images dans  $W_L^G$  des deux éléments suivants sont  $F^{-1}$ -conjugués :

$$g_j^{-1} g_{\dot{w}'}^{-1} F(g_{\dot{w}'} g_j) = g_j^{-1} F(\dot{w}') g_j g_j^{-1} F(g_j) = \tilde{i}(F(\dot{w}')) g_j^{-1} F(g_j),$$

$$g_z^{-1} x^{-1} F(x g_z) = F(\dot{z}).$$

Leurs images dans  $W_L^G$  sont  $\eta_j^{-1}(w')F(a_j)$  et  $F(z)$ , respectivement. De la définition de  $\eta_j$  se déduit la formule  $\eta_j^{-1}(w') = F(a_j w' a_j^{-1})$ . On sait donc que  $F(a_j w') \sim_{F^{-1}} F(z)$ . Il est clair que  $F$  respecte les classes  $F^{-1}$ -conjugaison, et la condition précédente équivaut à ce que

$$a_j w' \sim_{F^{-1}} z.$$

Pour chaque classe de  $\eta_j$ -conjugaison  $C \subset W_{M_j}^H$ , posons

$$Y(C) = \{x \in G : x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{ss}^z, j(z, x) = j \text{ et } C(z, x) = C\}.$$

L’ensemble  $Y(C)$  est vide sauf si un (et donc tout) membre de  $a_j C$  est  $F^{-1}$ -conjugué à  $z$ . Choisissons un représentant  $w'_C$  de chaque classe. Le cardinal  $|M_j^{w'_C}|$  et la fonction de Green généralisée  $Q_{w'_C}^H$  sont tous deux indépendants du choix de  $w'_C$ . La formule (40) devient donc :

$$k(z)(\sigma v) = |H|^{-1} |L^z|^{-1} \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{C \subset W_{M_j}^H \\ a_j w'_C \sim_{F^{-1}} z}} \sum_{x \in Y(C)} |M^{a_j w'_C}| Q_{w'_C}^H(v).$$

L’élément  $x$  ne joue plus aucun rôle dans la formule ; on peut remplacer la deuxième somme ci-dessus par le cardinal de  $Y(C)$ . Ensuite, on peut remplacer la somme sur certaines classes

de  $\eta_j$ -conjugaison par une somme sur certains éléments  $w' \in W_{M_j}^H$ , pourvu qu'on divise aussi chaque terme par le cardinal de la classe correspondante. Ce cardinal est égal à  $|W_{M_j}^H|/|Z_{\eta_j}(w')|$ , et l'on obtient donc

$$k(z)(\sigma v) = |H|^{-1} |L^z|^{-1} \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H \\ a_j w' \sim_{F^{-1}z}}} \frac{|Y(w')| |M^{a_j w'_C}| |Z_{\eta_j}(w')|}{|W_{M_j}^H|} Q_{w'}^H(v).$$

Ici,  $Y(w')$  désigne l'ensemble  $Y(C)$ , où  $C$  est la classe de  $\eta_j$ -conjugaison de  $w'$ . Enfin, l'argument de [9, p. 510] montre que

$$|Y(w')| = \frac{|H| |L^z| |Z_{F^{-1}(z)}|}{|M^{a_j w'_C}| |Z_{\eta_j}(w')|}.$$

La formule cherchée s'ensuit.  $\square$

**Lemme 6.7** (cf. [15, Lemme 7.1]). *Pour tout  $w \in W_t^G$ , on a*

$$k(w_1 w)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r |Z_{\eta_j}(w)| \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{\underline{w} \in W(\underline{v}) \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w}} Q_{\underline{w}}^H.$$

**Démonstration.** Il est clair que pour tout  $w'$  figurant dans la somme du Lemme 6.6, le cardinal de l'ensemble des  $t \in W_L^G$  tels que  $F^{-1}(t)a_j w' t^{-1} = w_1 w$  est égal à celui de  $Z_{F^{-1}(w_1 w)}$ . Donc

$$k(w_1 w)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H \\ a_j w' \sim_{F^{-1}w_1 w}}} \sum_{\substack{t \in W_L^G \\ F(t)a_j w' t^{-1} = w_1 w}} Q_{w'}^H.$$

Pour tout  $t$ , soit  $\underline{v}(t)$  la double classe  $W_t^G t W_{M_j}^H$ . D'après le Lemme 6.3, on a

$$\begin{aligned} k(w_1 w)(\sigma v) &= \sum_{j=1}^r \frac{1}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H \\ a_j w' \sim_{F^{-1}w_1 w}}} \sum_{t \in W_L^G} \frac{1}{|W(\underline{v}(t))|} \sum_{\substack{y \in W_t^G, z \in W_{M_j}^H \\ y w_y z = w_1^{-1} F^{-1}(t) a_j}} Q_{w'}^H \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{1}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H, t \in W_L^G, \underline{v}(t) = \underline{v} \\ F^{-1}(t)a_j w' t^{-1} = w_1 w}} \sum_{\substack{y \in W_t^G, z \in W_{M_j}^H \\ y w_y z = w_1^{-1} F^{-1}(t) a_j}} Q_{w'}^H. \end{aligned}$$

La condition  $yw_{\underline{v}}z = w^{-1}F^{-1}(t)a_j$  implique que  $t^{-1} = F(a_j^{-1}w_{\underline{v}}^{-1}y^{-1}w_1^{-1})$ , et la condition  $F^{-1}(t)a_jw't^{-1} = w_1w$  équivaut à ce que  $yw_{\underline{v}}zw'F(a_jz^{-1}w_{\underline{v}}^{-1}y^{-1}w_1^{-1}) = w$ . La formule ci-dessus devient donc :

$$k(w_1w)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H, y \in W_t^G, z \in W_{M_j}^H \\ yw_{\underline{v}}zw'F(a_jz^{-1}w_{\underline{v}}^{-1}y^{-1}w_1^{-1})=w}} Q_{w'}^H. \tag{41}$$

La condition dans la troisième somme peut également s'écrire sous de nombreuses formes équivalentes, dont :

$$\begin{aligned} yw_{\underline{v}}zw'F(a_jz^{-1}w_{\underline{v}}^{-1}y^{-1}w_1^{-1}) &= w, \\ w_{\underline{v}}zw'F(a_jz^{-1}w_{\underline{v}}^{-1}) &= y^{-1}wF(w_1y), \\ F^{-1}(w_{\underline{v}})F^{-1}(zw')a_jz^{-1}w_{\underline{v}}^{-1} &= F^{-1}(y^{-1}w)w_1y, \\ F^{-1}(w_{\underline{v}})a_j\eta_j(zw')z^{-1}w_{\underline{v}}^{-1} &= w_1\gamma_1(y^{-1}w)y, \\ F^{-1}(w_{\underline{v}})a_j\eta_j(zw'\eta_j^{-1}(z^{-1}))w_{\underline{v}}^{-1} &= w_1\gamma_1(y^{-1}w\gamma_1^{-1}(y)). \end{aligned}$$

La dernière de ces possibilités équivaut à l'énoncé suivant :

$$\text{Il existe un } \underline{w} \in W(\underline{v}) \text{ tel que } \kappa(\underline{w}) = y^{-1}w\gamma_1^{-1}(y) \text{ et } \lambda(\underline{w}) = zw'\eta_j^{-1}(z^{-1}).$$

On peut maintenant écrire la formule comme suit :

$$k(w_1w)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H, \underline{w} \in W(\underline{v}), y \in W_t^G, z \in W_{M_j}^H \\ \kappa(\underline{w})=y^{-1}w\gamma_1^{-1}(y), \lambda(\underline{w})=zw'\eta_j^{-1}(z^{-1})}} Q_{w'}^H.$$

Il est clair qu'on peut remplacer l'égalité  $\kappa(\underline{w}) = y^{-1}w\gamma_1^{-1}(y)$  par la condition  $\kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w$ , pourvu qu'on introduise en même temps la multiplicité  $|Z_{\gamma_1}(w)|$ , et de même pour la condition sur  $w'$  :

$$k(w_1w)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H, \underline{w} \in W(\underline{v}) \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w, \lambda(\underline{w}) \sim_{\eta_j} w'}} |Z_{\gamma_1}(w)| |Z_{\eta_j}(w')| Q_{w'}^H.$$

Ensuite, puisque  $Q_{w'}^H$  ne dépend que de la classe de  $\eta_j$ -conjugaison de  $w'$ , on peut le remplacer par  $Q_{\lambda(\underline{w})}^H$ . On peut également remplacer  $|Z_{\eta_j}(w')|$  par  $|Z_{\eta_j}(\lambda(\underline{w}))|$ , et on obtient ainsi une formule dans laquelle  $w'$  ne joue plus de grand rôle :

$$k(w_1 w)(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \frac{|Z_{\gamma_1}(w)|}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{\underline{w} \in W(\underline{v}) \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w}} \sum_{\substack{w' \in W_{M_j}^H \\ \lambda(\underline{w}) \sim_{\eta_j} w'}} |Z_{\eta_j}(\lambda(\underline{w}))| Q_{\lambda(\underline{w})}^H.$$

Le nombre de  $w' \in W_{M_j}^H$  tel que  $\lambda(\underline{w}) \sim_{\eta_j} w'$  est simplement le cardinal de la classe de  $\eta_j$ -conjugaison de  $\lambda(\underline{w})$ , soit  $|W_{M_j}^H|/|Z_{\eta_j}(\lambda(\underline{w}))|$ . On a donc

$$\begin{aligned} k(w_1 w)(\sigma v) &= \sum_{j=1}^r \frac{|Z_{\gamma_1}(w)|}{|W_{M_j}^H|} \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{\underline{w} \in W(\underline{v}) \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w}} \frac{|W_{M_j}^H|}{|Z_{\eta_j}(\lambda(\underline{w}))|} |Z_{\eta_j}(\lambda(\underline{w}))| Q_{\lambda(\underline{w})}^H \\ &= \sum_{j=1}^r |Z_{\gamma_1}(w)| \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{\underline{w} \in W(\underline{v}) \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w}} Q_{\lambda(\underline{w})}^H, \end{aligned}$$

ce qui est la formule cherchée.  $\square$

Enfin, nous pouvons combiner les deux lemmes précédents avec les développements de la Section 5.

**Théorème 6.8.** *Nous supposons l'hypothèse 5.1 de triviale du cocycle satisfaite. Alors, pour tout  $E \in \text{Irr}(W_{\mathfrak{t}}^G)_{\text{ex}}$  et tout  $g = \sigma v \in G$ , on a*

$$\chi_{A_E}(\sigma v) = \sum_{j=1}^r \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \sum_{E' \in \text{Irr}(W_{M_j}^H)_{\text{ex}}} \langle E, E' \rangle_{\underline{v}} Q_{E'}^H(v).$$

**Démonstration.** D'après (23), on a

$$\begin{aligned} \chi_{A_E}(\sigma v) &= \frac{1}{|W_{\mathfrak{t}}^G|} \sum_{w \in W_{\mathfrak{t}}^G} \text{Tr}(\gamma_1 w, \tilde{E}) \chi_{K^{w_1 w, \varphi^{w_1 w}}} \\ &= \frac{1}{|W_{\mathfrak{t}}^G|} \sum_{w \in W_{\mathfrak{t}}^G} \text{Tr}(\gamma_1 w, \tilde{E}) |Z_{\gamma_1}(w)| \sum_{j=1}^r \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\substack{\underline{w} \in W(\underline{v}) \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w}} Q_{\lambda(\underline{w})}^H \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\underline{w} \in W(\underline{v})} \left( \sum_{\substack{w \in W_{\mathfrak{t}}^G \\ \kappa(\underline{w}) \sim_{\gamma_1} w}} \frac{|Z_{\gamma_1}(\kappa(\underline{w}))|}{|W_{\mathfrak{t}}^G|} \right) \text{Tr}(\gamma_1 \kappa(\underline{w}), \tilde{E}) Q_{\lambda(\underline{w})}^H. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé deux conséquences du fait que  $\kappa(\underline{w})$  et  $w$  sont  $\gamma_1$ -conjugués : d'une part,  $|Z_{\gamma_1}(w)| = |Z_{\gamma_1}(\kappa(\underline{w}))|$ , et d'autre part, on en déduit que les éléments  $\gamma_1\kappa(\underline{w})$  et  $\gamma_1 w$  de  $\tilde{W}_t^{\mathbf{G}}$  sont conjugués, et donc que  $\text{Tr}(\gamma_1 w, \tilde{E}) = \text{Tr}(\gamma_1\kappa(\underline{w}), \tilde{E})$ .

Ensuite, on peut simplement enlever l'expression entre parenthèses ci-dessus : le nombre de  $w \in W_t^{\mathbf{G}}$  qui sont  $\gamma_1$ -conjugués à  $\kappa(\underline{w})$  n'est autre que le cardinal de la classe de  $\gamma_1$ -conjugaison de  $\kappa(\underline{w})$ , soit  $|W_t^{\mathbf{G}}|/|Z_{\gamma_1}(\kappa(\underline{w}))|$ . La formule devient donc :

$$\begin{aligned} \chi_{A_E}(\sigma v) &= \sum_{j=1}^r \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\underline{w} \in W(\underline{v})} \text{Tr}(\gamma_1\kappa(\underline{w}), \tilde{E}) Q_{\lambda(\underline{w})}^{\mathbf{H}}(v) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{|W(\underline{v})|} \sum_{\underline{w} \in W(\underline{v})} \text{Tr}(\gamma_1\kappa(\underline{w}), \tilde{E}) \sum_{E' \in \text{Irr}(W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})_{\text{ex}}} \text{Tr}(\gamma'\lambda(\underline{w}), \tilde{E}') Q_{E'}^{\mathbf{H}}(v) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{\underline{v} \in \mathcal{N}_j} \sum_{E' \in \text{Irr}(W_{\mathbf{M}_j}^{\mathbf{H}})_{\text{ex}}} \langle E, E' \rangle_{\underline{v}} Q_{E'}^{\mathbf{H}}(v). \quad \square \end{aligned}$$

### 7. Classes de conjugaison de sous-groupes de Lévi dans le centralisateur d'un élément semi-simple

On garde les notations des sections précédentes :  $\mathbf{G}$  est un groupe réductif,  $\mathbf{L} = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_1)$  est un sous-groupe de Lévi qui possède un couple cuspidal  $(\Sigma, \mathcal{E})$ , et  $\mathbf{M} = Z_{\mathbf{L}}^{\circ}(\sigma)$ , où  $\sigma \in \Sigma_{\text{ss}}$ . Rappelons la définition de l'ensemble  $\mathcal{M}$  introduit en (29) :

$$\mathcal{M} = \{ \mathbf{M}_x : x \in \mathbf{G}, x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{\text{ss}} \} \quad \text{où} \quad \mathbf{M}_x = Z_{\mathbf{H}}^{\circ}(x\mathbf{T}_1x^{-1}).$$

À ce moment-là, nous avons remarqué que  $\mathcal{M}$  se répartit en un nombre fini de classes de conjugaison sous  $\mathbf{H}$ .

**Remarque 7.1.** À la Section 5.4, la notation  $\sigma$  désignait un élément de  $\mathbf{G}$  conjugué à un élément de  $\Sigma_{\text{ss}}$ . Ici, on l'a supposé dans  $\Sigma_{\text{ss}}$ . Il est clair qu'aucune perte de généralité n'en résulte.

Cette section est consacrée à la preuve du théorème suivant :

**Théorème 7.2.** *Si  $\mathbf{G}$  est semi-simple, quasi-simple, et différent de  $\text{PSp}_{2n}$ ,  $\text{PSO}_{2n}$ ,  $\frac{1}{2}\text{Spin}_{2n}$  et  $E_7^{\text{sc}}$ , alors tous les membres de  $\mathcal{M}$  sont conjugués sous  $\mathbf{H}$ . Si  $\mathbf{G}$  est l'un de ces quatre groupes, alors  $\mathcal{M}$  se répartit en une ou deux classes de conjugaison sous  $\mathbf{H}$ .*

Il est à rappeler (voir la Remarque 6.1) que tous les membres de  $\mathcal{M}$  sont conjugués sous  $\mathbf{G}$  et donc isomorphes.

**Remarque 7.3.** Soit  $x \in \mathbf{G}$  est tel que  $x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{\text{ss}}$ , et posons  $\sigma' = x^{-1}\sigma x$ . On sait, d'après la Remarque 6.1, que  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont conjugués (dans  $\mathbf{L}$ ) à multiplication par un élément de  $\mathbf{T}_1$  près. Il y a donc un  $f \in \mathbf{L}$  et un  $z \in \mathbf{T}_1$  tel que  $f^{-1}\sigma'f = z\sigma$ , ou autrement dit,  $(xf)^{-1}\sigma(xf) = z\sigma$ . Puisque  $f$  centralise  $\mathbf{T}_1$ , il est clair  $xf\mathbf{T}_1(xf)^{-1} = x\mathbf{T}_1x^{-1}$ , et donc que  $\mathbf{M}_{xf} = \mathbf{M}_x$ . On ne

s'intéresse qu'à la classe de conjugaison de ce dernier groupe, et donc on peut supposer, sans perte de généralité, que  $x^{-1}\sigma x = z\sigma$ , avec  $z \in \mathbf{T}_1$ .

7.1. *Les cas triviaux*

Si  $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ , alors on a  $\mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{M}_x$  pour tout  $x$ , et il n'y a rien à démontrer. En particulier, le théorème est donc vrai dans les cas suivants :

$\mathbf{G} = \mathbf{L}$	$\mathbf{M}$
$E_6$	$A_5 \times A_1, (A_2)^3, E_6$
$E_7$	$A_5 \times A_2, (A_3)^2 \times A_1, E_7$
$E_8$	$(A_4)^2, A_5 \times A_2 \times A_1, D_5 \times A_3, D_8, E_6 \times A_2, E_7 \times A_1, E_8$
$F_4$	$C_3 \times A_1, A_2 \times A_2, A_3 \times A_1, B_4, F_4$
$G_2$	$A_1 \times A_1, A_2, G_2$

7.2. *Graphes de Dynkin*

Soient  $\Delta_{\mathbf{G}}, \Delta_{\mathbf{L}}, \Delta_{\mathbf{H}}, \Delta_{\mathbf{M}}$  et  $\Delta_{\mathbf{M}_x}$  les graphes de Dynkin des groupes correspondants, et soient  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{L}}$  les graphes de Dynkin complétés de  $\mathbf{G}$  et de  $\mathbf{L}$ . Rappelons que le graphe de Dynkin d'un sous-groupe de Lévi (resp. du centralisateur d'un élément semi-simple) peut être identifié à un sous-graphe, unique à conjugaison sous le groupe de Weyl près, du graphe de Dynkin (resp. graphe de Dynkin complété) du groupe de départ. On a donc les inclusions suivantes :

$$\Delta_{\mathbf{L}} \subset \Delta_{\mathbf{G}} \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbf{M}_x} \subset \Delta_{\mathbf{H}} \subset \tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}.$$

On sait déjà que  $\Delta_{\mathbf{M}} \simeq \Delta_{\mathbf{M}_x}$  pour tout  $x$ . Pour montrer que tous les  $\mathbf{M}_x$  sont conjugués dans  $\mathbf{H}$ , il suffit de montrer que les sous-graphes  $\Delta_{\mathbf{M}_x}$  de  $\Delta_{\mathbf{H}}$  sont conjugués par le groupe de Weyl de  $\mathbf{H}$ . En particulier, si tous les sous-graphes de  $\Delta_{\mathbf{H}}$  isomorphes à  $\Delta_{\mathbf{M}}$  sont conjugués, alors le théorème s'ensuit.

Il arrive parfois que  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  (et donc  $\Delta_{\mathbf{H}}$ ) ne contienne qu'un seul sous-graphe isomorphe à  $\Delta_{\mathbf{M}}$ . Dans ces cas-là, il n'y a rien à démontrer, et le résultat est immédiat.

7.3. *Les groupes de type A et les groupes exceptionnels*

Si  $\mathbf{G}$  est de type  $A_n$ , alors tout centralisateur d'un élément semi-simple est en fait de Lévi, et on peut donc se restreindre à considérer le graphe de Dynkin non complété  $\Delta_{\mathbf{G}}$ .  $\mathbf{M}$  est de type  $(A_{r-1})^{(n+1)/r}$ . Si l'on note  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les nœuds de  $\Delta_{\mathbf{G}}$ , il est clair que l'unique sous-graphe de type  $(A_{r-1})^{(n+1)/r}$  est celui qui contient les nœuds

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}; \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{2r-1}; \dots; \alpha_{(n+1)/r-r+1}, \dots, \alpha_n.$$

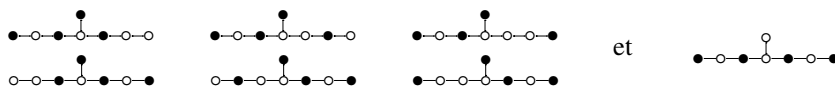
Supposons maintenant que  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  est l'un des triplets qui figurent dans la Table 3. Dans les cas où il n'y a aucune mention sous l'en-tête « remarque », le graphe  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  ne contient qu'un seul sous-graphe isomorphe à  $\Delta_{\mathbf{M}}$ .

Dans les trois cas qui portent la mention (\*),  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  contient d'autres sous-graphes isomorphes à  $\Delta_{\mathbf{M}}$ , et il faut donc faire un argument supplémentaire. Considérons le cas où  $\mathbf{G}$  est de type  $E_7$  et  $\mathbf{M}$  de type  $(A_1)^4$ . Le groupe ne peut pas être un sous-groupe de Lévi de  $\mathbf{G}$  : on sait que  $\mathbf{M}$  admet

Table 3  
Groupes exceptionnels.

G	L	M	Graphe	Remarque
$A_n$	$(A_{r-1})^{(n+1)/r}$	$(A_{r-1})^{(n+1)/r}$		
$E_6$	$D_4$	$A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$		
	$D_4$	$D_4$		
$E_7$	$D_4$	$A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$		(*)
	$D_4$	$D_4$		
	$E_6$	$A_2 \times A_2 \times A_2$		
	$E_6$	$E_6$		
$E_8$	$D_4$	$A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$		(*)
	$D_4$	$D_4$		
	$E_6$	$A_2 \times A_2 \times A_2$		
	$E_6$	$E_6$		
	$E_7$	$A_3 \times A_3 \times A_1$		
	$E_7$	$E_7$		
$F_4$	$B_2$	$A_1 \times A_1$		(*)
	$B_2$	$B_2$		

un faisceau caractère cuspidal, mais selon la Table 1,  $G$  n’a pas de sous-groupe de Lévi isogène à  $M$  qui en admet un. Il est facile de faire la liste de tous les sous-graphes de  $\Delta_G$  de type  $(A_1)^4$  :



Les six premiers sous-graphes sont tous conjugués sous le groupe de Weyl de  $G$ , et chacun des quatre premiers sous-graphes est contenu dans un sous-graphe de type  $E_7$ , et correspond donc à un sous-groupe de Lévi. Seul le dernier correspond à un sous-groupe qui n’est pas de Lévi ; celui-là doit être égal à  $\Delta_M$ .

Un argument semblable permet de traiter les autres cas marqués (\*) : dans chaque cas, on trouve d’après la Table 1 que  $M$  n’est pas un sous-groupe de Lévi de  $G$ , et que  $\tilde{\Delta}_G$  n’a qu’un seul sous-graphe isomorphe à  $\Delta_M$  dont le sous-groupe correspondant n’est pas de Lévi. Ce sous-graphe-là est donc forcément égal et à  $\Delta_M$ . En particulier,  $\Delta_M$  est seul dans sa classe de conjugaison sous le groupe de Weyl  $G$ , et donc sous celui de  $H$ .

Le théorème est maintenant démontré dans tous les cas figurant dans la Table 3.

### 7.4. Les groupes classiques

Supposons maintenant que  $G$  est l’un des groupes  $SO_{2n+1}$ ,  $Sp_{2n}$ , ou  $SO_{2n}$ . Dans les groupes classiques, nous pouvons tirer profit du fait que tout sous-groupe de Lévi se décompose en produit



direct de son sous-groupe dérivé et d'un tore. En particulier, on a

$$L \simeq L_{\text{der}} \times T_1.$$

De plus,  $L$  se plonge dans un sous-groupe réductif

$$L_{\text{der}} \times L_1 \subset G$$

où  $L_1$  est semi-simple, quasi-simple et du même type que  $G$ , et où  $T_1$  est un tore maximal de  $L_1$ . Le groupe  $L_1$  se décrit comme suit : si  $G = SO_N$  (resp.  $G = Sp_N$ ), alors il y a un entier positif  $M \leq N$  tel que  $L_{\text{der}} \simeq SO_M$  (resp.  $L_{\text{der}} \simeq Sp_M$ ), et on a que  $L_1 \simeq SO_{N-M}$  (resp.  $L_1 \simeq Sp_{N-M}$ ). Il est à noter que  $L_{\text{der}} \times L_1$  n'est pas en général de Lévi.

Si  $y$  est un élément d'un groupe classique, on note  $E(y)$  l'ensemble (avec multiplicités) de ses valeurs propres. Si l'on décompose un élément  $y \in L_{\text{der}} \times L_1$  en un produit  $y = d \times t$ , où  $d \in L_{\text{der}}$  et  $t \in L_1$ , alors  $E(y) = E(d) \cup E(t)$ . Enfin, rappelons que dans tout groupe classique quasi-simple, deux éléments semi-simples sont conjugués si et seulement s'ils ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Imposons l'hypothèse de la Remarque 7.3, et reprenons ses notations :  $\sigma' = x^{-1}\sigma x = z\sigma$ , où  $z \in T_1$ . Écrivons  $\sigma$  comme un produit  $d \cdot t$ , où  $d \in L_{\text{der}}$  et  $t \in T_1$ , et de même pour  $\sigma' = d' \cdot t'$ . Puisque de telles décompositions sont uniques, l'égalité  $\sigma' = z\sigma$  implique que

$$d' = d \quad \text{et} \quad t' = zt.$$

Puisque  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont conjugués, on sait que  $E(\sigma) = E(\sigma')$ , et puis il s'ensuit que  $E(t) = E(zt)$ . Il existe donc un  $k \in N_{L_1}(T_1)$  tel que  $ktk^{-1} = zt$ . Puisque  $k$  commute avec  $L_{\text{der}}$ , on a maintenant

$$k\sigma k^{-1} = k d t k^{-1} = z d t = \sigma'.$$

Posons  $h' = xk$  ; alors  $h'\sigma h'^{-1} = \sigma$ . D'autre part, on a que  $h'T_1 h'^{-1} = xT_1 x^{-1}$  (car  $k$  normalise  $T_1$ ), et donc

$$h'Mh'^{-1} = M_x. \tag{42}$$

L'élément  $h'$  appartient au groupe éventuellement non connexe  $Z_G(\sigma)$ . Il reste de démontrer qu'on peut remplacer  $h'$  par un élément de  $H$ .

Considérons le groupe non connexe  $O_m$ . Il est clair que pour tout tore  $S \subset SO_m$ , il existe un élément dans la composante non neutre de  $O_m$  qui commute avec  $S$ . Par conséquent, si  $S$  est un tore dans un produit quelconque des  $O_m$ , des  $Sp_m$ , et des  $GL_m$ , alors toute composante contient un élément commutant avec  $S$ . Le groupe  $Z_G(\sigma)$  est un sous-groupe d'un tel produit, et donc dans la composante de  $Z_G(\sigma)$  contenant  $h'$ , il existe un élément  $r$  qui centralise le tore  $x^{-1}T_1x$ . Cette dernière condition implique que  $r$  normalise  $M_x$ . Ensuite, posons  $h = r^{-1}h'$ . Cet élément est forcément dans la composante neutre de  $Z_G(\sigma)$ , i.e., dans  $H$ . Il résulte alors de (42) que  $hMh^{-1} = M_x$ .  $M$  et  $M_x$  sont donc conjugués sous  $H$ .

**Remarque 7.4.** Au cours de cette preuve, l'hypothèse que  $L$  et  $M$  admettent des faisceaux caractères cuspidaux n'a joué aucun rôle. Cela nous aidera plus tard à traiter les groupes simplement connexes de type classique.

### 7.5. Les groupes adjoints de type classique

Supposons que  $\mathbf{G}$  est l'un des groupes  $\mathrm{PSp}_{2n}$  ou  $\mathrm{PSO}_{2n}$ . La preuve pour ces groupes-ci consiste à se ramener au cas des groupes classiques. Posons  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathrm{Sp}_{2n}$  ou  $\mathrm{SO}_{2n}$ , respectivement, et soit  $\pi : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  l'application quotient naturelle. Soit  $\tilde{\mathbf{T}}_1$  la composante neutre de  $\pi^{-1}(\mathbf{T}_1)$ , et posons  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{Z}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}_1)$  et  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} = \pi^{-1}(\Sigma_{\mathrm{ss}})$ . Ensuite, choisissons un point  $\dot{\sigma} \in \pi^{-1}(\sigma)$ , ainsi qu'un  $\dot{x} \in \pi^{-1}(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{G}$  tel que  $x^{-1}\sigma x \in \Sigma_{\mathrm{ss}}$ . On a donc  $\dot{x}^{-1}\dot{\sigma}\dot{x} \in \tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$ . Enfin, posons  $\tilde{\mathbf{M}}_{\dot{x}} = \mathbf{Z}_{\tilde{\mathbf{H}}}(\dot{x}\tilde{\mathbf{T}}_1\dot{x}^{-1})$ . L'ensemble  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$  est soit connexe, soit à deux composantes. Essayons d'abord de mieux le comprendre.

Soit  $C \subset \mathbf{L}/\mathbf{T}_1$  la classe de conjugaison dont  $\Sigma_{\mathrm{ss}}$  est l'image réciproque, et considérons l'application  $q : \tilde{\mathbf{L}}/\tilde{\mathbf{T}}_1 \rightarrow \mathbf{L}/\mathbf{T}_1$ . L'ensemble  $\tilde{C} = q^{-1}(C)$  contient une ou deux classes de conjugaison et une ou deux composantes. D'une part, toute classe de conjugaison dans  $\tilde{\mathbf{L}}/\tilde{\mathbf{T}}_1$  est connexe ; d'autre part, la réunion de deux classes de conjugaison de même dimension est forcément non connexe. On conclut que chaque composante de  $\tilde{C}$  est une classe de conjugaison. Ensuite, l'application  $r : \tilde{\mathbf{L}} \rightarrow \tilde{\mathbf{L}}/\tilde{\mathbf{T}}_1$  étant à noyau connexe, on voit que l'opération d'image réciproque sous  $r$  préserve le nombre de composantes. Donc chaque composante de  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} = r^{-1}(\tilde{C})$  est l'image réciproque d'une seule classe de conjugaison dans  $\tilde{\mathbf{L}}/\tilde{\mathbf{T}}_1$ .

Si  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$  est connexe, alors tous les  $\tilde{\mathbf{M}}_{\dot{x}}$  sont conjugués sous  $\tilde{\mathbf{H}}$  (car le théorème est déjà établi pour  $\tilde{\mathbf{G}}$ ), et donc leurs images  $\mathbf{M}_x$  sont conjugués sous  $\mathbf{H}$ .

En revanche, si  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$  est réunion de deux composantes, notons-les  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}^+$  et  $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}^-$ . Ensuite, définissons deux sous-ensemble  $\mathcal{M}^+, \mathcal{M}^- \subset \mathcal{M}$  par

$$\mathcal{M}^{\pm} = \{ \mathbf{M}_x : \dot{x}^{-1}\dot{\sigma}\dot{x} \in \tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}^{\pm} \}.$$

Il est à noter que cette répartition de  $\mathcal{M}$  en deux sous-ensembles est bien définie, *i.e.*, indépendante des choix des éléments  $\dot{x}$  et  $\dot{\sigma}$ . Tous les membres de  $\mathcal{M}^+$  (resp.  $\mathcal{M}^-$ ) sont conjugués sous  $\mathbf{H}$ , puisque les  $\tilde{\mathbf{M}}_{\dot{x}}$  correspondants sont conjugués sous  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

Parfois, les membres de  $\mathcal{M}^+$  et de  $\mathcal{M}^-$  deviennent conjugués sous  $\mathbf{H}$ , mais il est également possible qu'ils restent non conjugués. Par exemple, supposons que  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathrm{SO}_{4r}$  et  $\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{L}} \simeq \mathrm{SO}_{2r} \times \tilde{\mathbf{T}}_1$ . Soit  $\dot{\sigma}$  l'élément  $(-1, 1) \in \mathrm{SO}_{2r} \times \tilde{\mathbf{T}}_1$ . Alors  $\tilde{\mathbf{H}} \simeq \mathrm{SO}_{2r} \times \mathrm{SO}_{2r}$ . Remarquons que les éléments  $\dot{\sigma}$  et  $-\dot{\sigma}$  ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités) ; ils sont donc conjugués dans  $\tilde{\mathbf{G}}$ . En effet, soit  $\dot{x} \in \tilde{\mathbf{G}}$  une matrice de permutation telle que la conjugaison par  $\dot{x}$  échange les deux facteurs de  $\tilde{\mathbf{H}}$ . On a alors  $\dot{x}^{-1}\dot{\sigma}\dot{x} = -\dot{\sigma}$ . Il est clair que  $\dot{x}\tilde{\mathbf{M}}\dot{x}^{-1}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}$  ne sont pas conjugués dans  $\tilde{\mathbf{H}}$ . Au contraire, l'image  $x$  de  $\dot{x}$  dans  $\mathrm{PSO}_{4r}$  centralise l'image  $\sigma$  de  $\dot{\sigma}$ . Par conséquent, les images de  $\tilde{\mathbf{M}}$  et de  $\dot{x}\tilde{\mathbf{M}}\dot{x}^{-1}$ , qui restent non conjugués, appartiennent tous les deux à  $\mathcal{M}$ .

### 7.6. Les groupes Spin et $\frac{1}{2}$ Spin

Si  $\mathbf{G}$  est l'un des groupes  $\mathrm{Spin}_m$  ou  $\frac{1}{2}\mathrm{Spin}_{4m}$ , posons  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathrm{SO}_m$  ou  $\mathrm{PSO}_{4m}$ , respectivement.  $\tilde{\mathbf{G}}$  est donc un quotient de  $\mathbf{G}$  par un sous-groupe central de cardinal 2. Définissons  $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_{\dot{x}}$  comme étant les images dans  $\tilde{\mathbf{G}}$  de  $\mathbf{L}, \mathbf{T}_1, \mathbf{H}, \Sigma_{\mathrm{ss}}$  et  $\mathbf{M}_x$ . Le théorème étant déjà établi pour  $\mathrm{SO}_m$  et  $\mathrm{PSO}_{4m}$ , on sait que les  $\tilde{\mathbf{M}}_{\dot{x}}$  se répartissent en une ou deux classes de conjugaison sous  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

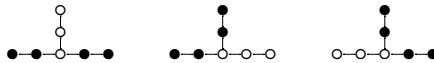
Ainsi que nous l'avons remarqué à la Section 7.2, les questions de conjugaison de sous-groupes de Lévi se résolvent au niveau du graphe de Dynkin : deux sous-groupes de Lévi sont

conjugués si et seulement si leur sous-graphes correspondants sont conjugués par le groupe de Weyl. Les  $\mathbf{M}_x$  et les  $\bar{\mathbf{M}}_x$  étant des sous-groupes de Lévi correspondants de  $\mathbf{H}$  et  $\bar{\mathbf{H}}$ , on voit que la répartition des  $\mathbf{M}_x$  en classes de conjugaison sous  $\mathbf{H}$  coïncide avec celle des  $\bar{\mathbf{M}}_x$  sous  $\bar{\mathbf{H}}$ .

7.7. *Le cas  $\mathbf{G} = E_6, \mathbf{L} = \mathbf{M} = (A_2)^2$*

Imposons les hypothèses et prenons les notations de la Remarque 7.3 : on a  $\sigma' = x^{-1}\sigma x = z\sigma$  pour un certain  $z \in \mathbf{T}_1$ .

Le graphe de Dynkin complété  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  contient trois sous-graphes de type  $(A_2)^2$  :



Si  $\Delta_{\mathbf{H}}$  ne contient qu'un de ces trois graphes, alors le résultat se déduit des arguments de la Section 7.2. Le seul sous-graphe propre de  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  qui en contient au moins deux est de type  $(A_2)^3$ , et celui-ci les contient tous les trois. Supposons désormais que  $\mathbf{H}$  est de type  $(A_2)^3$ .

Le groupe  $\mathbf{H}$  est donc un quotient central de  $(\mathrm{SL}_3)^3$ . Notons  $\mu_3$  le groupe des racines troisièmes de l'unité, identifié avec le groupe des matrices scalaires dans (*i.e.*, le centre de)  $\mathrm{SL}_3$ . Nous montrons maintenant que

$$\mathbf{H} \simeq (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3) / \mu_3^\Delta,$$

où  $\mu_3^\Delta$  est l'image du plongement diagonal  $\mu_3 \hookrightarrow \mu_3 \times \mu_3 \times \mu_3$ . Soit  $K$  le noyau de l'application  $(\mathrm{SL}_3)^3 \rightarrow \mathbf{H}$ . D'une part, on sait que  $|\mathbf{Z}(\mathbf{G})| = 3$ , et donc  $|\mathbf{Z}(\mathbf{L})/\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{L})|$  doit diviser 3, mais si  $K$  était trivial (et donc  $\mathbf{H} \simeq (\mathrm{SL}_3)^3$ ), on pourrait en déduire que  $|\mathbf{Z}(\mathbf{L})/\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{L})| = |\mathbf{Z}(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)| = 9$ . D'autre part, si  $|K|$  valait 9 ou 27, il est facile de voir que  $\mathbf{L}$  serait à centre connexe, mais pour qu'un groupe de type  $(A_2)^2$  admette un faisceau caractère cuspidal, il ne doit pas être à centre connexe. On conclut que  $|K| = 3$ , et sans perte de généralité, on peut identifier  $K$  avec  $\mu_3^\Delta$ .

Par un léger abus de notation, nous allons écrire des triplets  $(a, b, c) \in (\mathrm{SL}_3)^3$  pour désigner des éléments de  $\mathbf{H}$ . Soit  $\omega \in \mu_3$  une racine primitive troisième de l'unité. Le centre de  $\mathbf{H}$  est l'ensemble  $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mu_3\}$ , où on a, bien sûr, l'identification  $(\omega, \omega, \omega) = (1, 1, 1)$ .

Notons  $\mathbf{T}$  le groupe des matrices diagonales dans  $\mathrm{SL}_3$ , et soit  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ , et  $\mathbf{M}_3$  les images dans  $\mathbf{H}$  de  $\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathbf{T}, \mathbf{T} \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$ , et  $\mathrm{SL}_3 \times \mathbf{T} \times \mathrm{SL}_3$ , respectivement. Ces derniers sont des sous-groupes de Lévi de  $\mathbf{H}$  correspondant aux trois graphes ci-dessus. Tout sous-groupe de Lévi de  $\mathbf{H}$  de type  $(A_2)^2$  est conjugué à l'un de ces trois. Supposons, sans perte de généralité, que  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$  et que  $\mathbf{M}_x$  est égal à l'un de  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ . Notre but est donc de démontrer que  $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_1$ .

Soit  $U$  une représentation irréductible de  $\mathbf{G}$  de dimension 27, et soit  $V$  la représentation naturelle de  $\mathrm{SL}_3$  de dimension 3. Alors

$$U|_{\mathbf{H}} \simeq \underbrace{V \otimes V^* \otimes k}_{U_1} \oplus \underbrace{k \otimes V \otimes V^*}_{U_2} \oplus \underbrace{V^* \otimes k \otimes V}_{U_3}.$$

On a  $U_i = U^{\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{M}_i)}$  pour  $i = 1, 2, 3$ . (Ici  $U^{\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{M}_i)}$  désigne le sous-espace de  $U$  sur lequel  $\mathbf{Z}^\circ(\mathbf{M}_i)$  agit trivialement.)

Un élément  $(a, b, c) \in \mathbf{Z}(\mathbf{H})$  agit sur  $U_1$  (resp.  $U_2, U_3$ ) par le scalaire  $ab^{-1}$  (resp.  $bc^{-1}, ca^{-1}$ ). Nous pouvons maintenant identifier  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  comme sous-groupe de  $\mathbf{Z}(\mathbf{H})$  : c'est l'ensemble des

éléments qui agissent sur  $U$  par un scalaire, *i.e.*, l'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  où  $ab^{-1} = bc^{-1} = ca^{-1}$  :

$$Z(\mathbf{G}) = \{(1, 1, 1), (1, \omega, \omega^2), (1, \omega^2, \omega)\}.$$

Bien sûr, on a  $\sigma \in Z(\mathbf{H})$  ; par contre,  $\sigma \notin Z(\mathbf{G})$  (car  $\mathbf{H} = Z_{\mathbf{G}}^{\circ}(\sigma)$ ). Il y a donc six possibilités pour  $\sigma$  :

$$\begin{matrix} (1, 1, \omega), & (1, \omega, 1), & (1, \omega^2, \omega^2), \\ (1, 1, \omega^2), & (1, \omega, \omega), & (1, \omega^2, 1). \end{matrix} \tag{43}$$

Il est à noter que chaque élément de  $Z(\mathbf{H}) \setminus Z(\mathbf{G})$  agit sur les trois composantes  $U_1, U_2, U_3$  par trois scalaires différents.

Montrons maintenant que  $\sigma' \in Z(\mathbf{H}) \setminus Z(\mathbf{G})$  aussi. On sait que  $\sigma' = z\sigma$  avec  $z \in \mathbf{T}_1$ . Si  $\sigma = (a, b, c)$ , alors  $\sigma' = (a, b, c')$  pour une certaine matrice  $c' \in \mathbf{T}$ . Écrivons

$$\sigma' = \left( a, b, \begin{bmatrix} c'_1 & & \\ & c'_2 & \\ & & c'_3 \end{bmatrix} \right), \quad \text{où } c'_1 c'_2 c'_3 = 1.$$

Cet élément agit sur  $U_1$  par le scalaire  $ab^{-1}$ , et ses valeurs propres sur  $U_2$  (resp.  $U_3$ ) sont  $bc'^{-1}_1, bc'^{-1}_2, bc'^{-1}_3$  (resp.  $c'_1 a^{-1}, c'_2 a^{-1}, c'_3 a^{-1}$ ), chacune avec multiplicité 3. Mais ses valeurs propres doivent coïncider avec celles de  $\sigma$  : on en déduit immédiatement que  $c'_1, c'_2$ , et  $c'_3$  sont des racines troisièmes de l'unité. Ensuite, la condition  $c'_1 c'_2 c'_3 = 1$  sur trois racines troisièmes de l'unité implique qu'elles sont soit toutes égales, soit toutes distinctes. Mais si elles étaient toutes distinctes,  $\sigma'$  aurait trois valeurs propres distinctes sur  $U_2$ , tandis que  $\sigma$  n'en a que deux sur  $U_2 \oplus U_3$ . Il faut donc  $c'_1 = c'_2 = c'_3$ , *i.e.*, que  $c'$  soit une matrice scalaire, et donc que  $\sigma' \in Z(\mathbf{H})$ .

Puisque  $\sigma$  agit sur  $U_1 = U^{Z^{\circ}(\mathbf{M})}$  par  $ab^{-1}$ , il faut que  $\sigma'$  agisse sur  $U^{Z^{\circ}(\mathbf{M}_x)}$  par  $ab^{-1}$ . Mais  $\sigma'$  agit sur  $U_1$  par  $ab^{-1}$ , et par d'autres scalaires sur  $U_2$  et  $U_3$ . On en déduit que  $U^{Z^{\circ}(\mathbf{M}_x)} = U_1$ , et donc que  $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}$ .

7.8. *Le cas*  $\mathbf{G} = E_7, \mathbf{L} = \mathbf{M} = (A_1)^3$

Les hypothèses et notations de la Remarque 7.3 restent en vigueur.

Rappelons que  $E_7$  contient plusieurs classes de conjugaison de sous-groupes de Lévi de type  $(A_1)^3$ , dont une seule admet des faisceaux caractères cuspidaux. Le graphe de Dynkin complété  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  contient deux sous-graphes correspondant à cette classe de conjugaison :



Il s'ensuit que  $\mathcal{M}$  se répartit en au plus deux classes de conjugaison sous  $\mathbf{H}$ . Nous démontrons par exemple maintenant que les membres de  $\mathcal{M}$  ne sont pas forcément tous conjugués.

Prenons pour  $\mathbf{H}$  l'unique sous-groupe (à conjugaison près) de type  $A_3 \times A_1 \times A_3$ .  $\mathbf{H}$  est donc un quotient de  $SL_4 \times SL_2 \times SL_4$ .

Soit  $\mathbf{K}_1$  l'image de  $SL_4 \times SL_2 \times \mathbf{T}$  dans  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{K}_2$  l'image de  $\mathbf{T} \times SL_2 \times SL_4$ . Soit  $\mathbf{M}_1$  (resp.  $\mathbf{M}_2$ ) le sous-groupe de Lévi (unique à conjugaison près) de  $\mathbf{K}_1$  (resp.  $\mathbf{K}_2$ ) de type  $(A_1)^3$ .

Supposons, sans perte de généralité, que  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ . Il est clair que  $\mathbf{M}_2$  n'est pas conjugué à  $\mathbf{M}$  dans  $\mathbf{H}$ .

Puisque  $|Z(\mathbf{G})| = 2$ , on sait que  $|Z(\mathbf{K}_1)/Z^\circ(\mathbf{K}_1)| \leq 2$ . D'autre part, le fait que son sous-groupe de Lévi  $\mathbf{M}_1$  admette un faisceau caractère cuspidal implique que  $|Z(\mathbf{K}_1)/Z^\circ(\mathbf{K}_1)| = 2$ .

Explicitons le centre de  $\mathbf{H}$ . C'est un quotient de  $\mu_4 \times \mu_2 \times \mu_4$ . Des considérations semblables à celles de la section précédente permettent de trouver explicitement le noyau de cette application, en utilisant le fait que  $|Z(\mathbf{K}_1)/Z^\circ(\mathbf{K}_1)| = 2$  et que le caractère non trivial du centre de  $\mathbf{K}_1$  est à restriction non triviale sur chaque facteur quasi-simple de  $\mathbf{M}_1$ . On trouve qu'on peut identifier

$$\mathbf{H} \simeq (\mathrm{SL}_4 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_4) / \mu_4^\Delta,$$

où  $\mu_4^\Delta \subset \mu_4 \times \mu_2 \times \mu_4$  est le groupe cyclique engendré par  $(i, -1, i)$ .

En particulier, on a  $|Z(\mathbf{H})| = 8$ . Deux éléments parmi les 8 constituent  $Z(\mathbf{G})$  : à savoir, les triplets  $(1, 1, 1)$  et  $(-1, -1, -1)$ . L'élément  $\sigma$  doit être l'un des six éléments qui restent. Écrivons un ensemble de représentants de ces six éléments :

$$\text{ordre 4 : } \begin{array}{cc} (1, 1, i) & (1, -1, i) \\ (1, 1, -i) & (1, -1, -i) \end{array} \quad \text{ordre 2 : } \begin{array}{c} (1, 1, -1) \\ (1, -1, 1) \end{array}$$

Il est clair que  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  sont conjugués sous  $\mathbf{G}$  : leurs sous-graphes dans  $\tilde{\Delta}_{\mathbf{G}}$  sont conjugués. Soit  $x \in \mathbf{G}$  un élément tel que  $x\mathbf{K}_1x^{-1} = \mathbf{K}_2$  et  $x\mathbf{K}_2x^{-1} = \mathbf{K}_1$ . La conjugaison par  $x$  préserve  $\mathbf{H}$  et donc  $Z(\mathbf{H})$ . Puisqu'elle doit également préserver le facteur de type  $A_1$  dans  $\mathbf{H}$ , on voit que la conjugaison par  $x$  doit stabiliser les deux éléments d'ordre 2 dans  $Z(\mathbf{H})$ . (Il est à noter que  $(1, 1, -1) = (-1, 1, 1)$  dans  $Z(\mathbf{H})$ .)

En résumé, si l'on pose  $\sigma = (1, 1, -1)$  ou  $\sigma = (1, -1, 1)$ , il existe un  $x \in G$  qui stabilise  $\sigma$ , mais tel que  $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_2$  n'est pas conjugué dans  $\mathbf{H}$  à  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ .

## Références

- [1] P. Achar, A.-M. Aubert, Supports unipotents de faisceaux caractères, *J. Inst. Math. Jussieu* 6 (2007) 173–207.
- [2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Fasc. XXXIV, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V et VI : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits, Groupes engendrés par des réflexions, Systèmes de racines, Hermann & Cie, Paris, 1968.
- [3] R.B. Howlett, Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups, *Proc. London Math. Soc.* 21 (1980) 62–80.
- [4] G. Lusztig, Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius, *Invent. Math.* 28 (1976) 101–159.
- [5] G. Lusztig, Characters of Reductive Groups over a Finite Field, *Ann. of Math. Stud.*, vol. 107, Princeton University Press, 1984.
- [6] G. Lusztig, Intersection cohomology complexes on a reductive group, *Invent. Math.* 75 (1984) 205–272.
- [7] G. Lusztig, Character sheaves, *Adv. Math.* 56 (1985) 193–237;  
G. Lusztig, *Adv. Math.* 57 (1985) 226–265;  
G. Lusztig, *Adv. Math.* 57 (1985) 266–315;  
G. Lusztig, *Adv. Math.* 59 (1986) 1–63;  
G. Lusztig, *Adv. Math.* 61 (1986) 103–155.
- [8] G. Lusztig, On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements, *J. Algebra* 104 (1986) 146–194.
- [9] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour  $\mathrm{SO}(2n+1)$ , *Invent. Math.* 152 (2003) 461–623.
- [10] V. Ostrik, A remark on cuspidal local systems, *Adv. Math.* 192 (1) (2005) 218–224.
- [11] T. Shoji, Character sheaves and almost characters of reductive groups, *Adv. Math.* 111 (1995) 244–313.
- [12] T. Shoji, Character sheaves and almost characters of reductive groups, II, *Adv. Math.* 111 (1995) 314–354.

- [13] T. Shoji, Unipotent characters of finite classical groups, in: *Finite reductive groups: related structures and representations*, Proc. Int. Conf. Held in Luminy, Progr. Math. 141 (1997) 373–413.
- [14] T. Shoji, Lusztig’s conjecture for finite special linear groups, *Represent. Theory* 10 (2006) 164–222.
- [15] J.-L. Waldspurger, Une conjecture de Lusztig pour les groupes classiques, *Mem. Soc. Math. Fr. (N.S.)* 96 (2004).